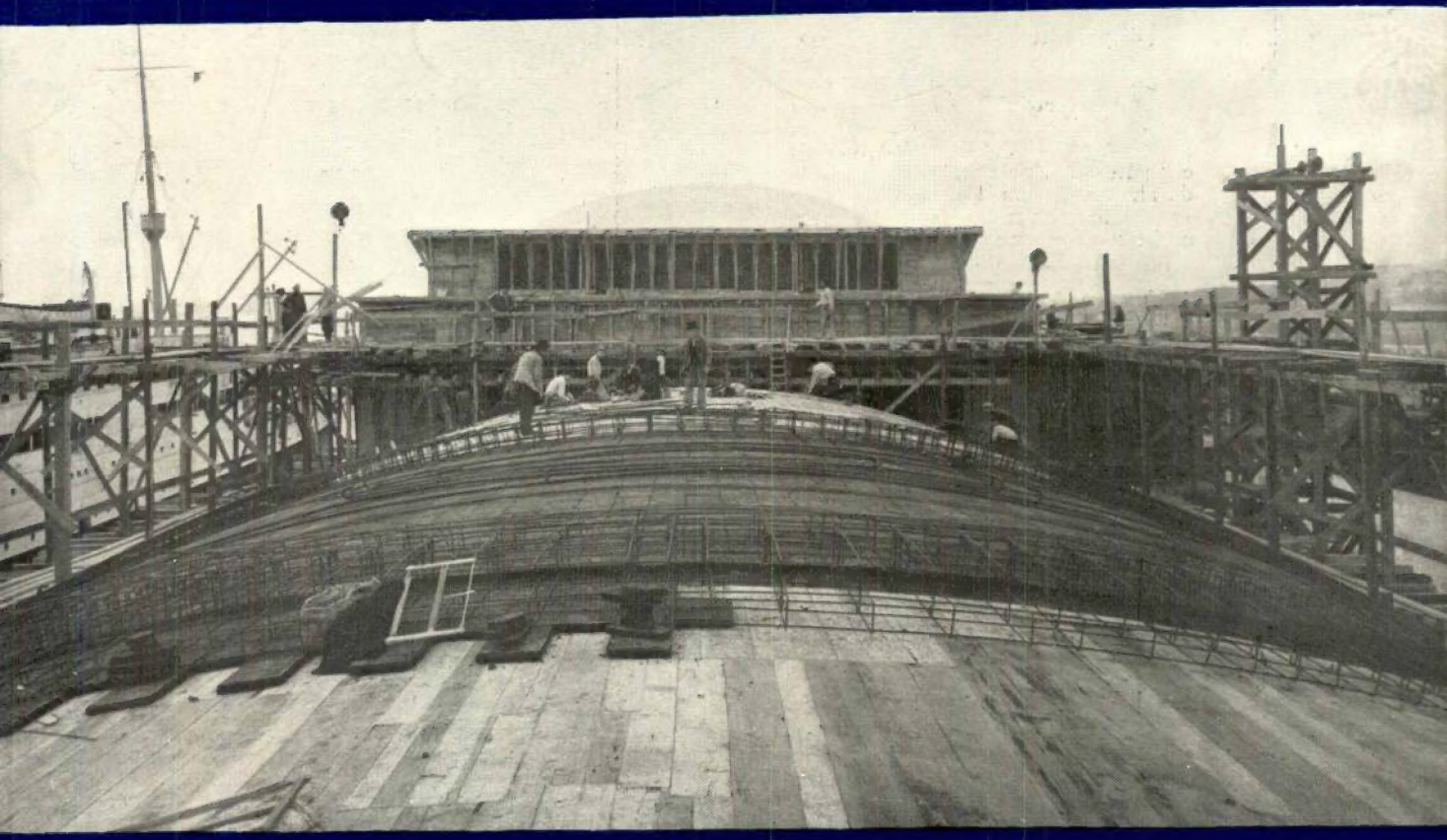
TÉCNICA



REVISTA DE ENGENHARIA
DOS ALUNOS DO I.S.T.

N.º 120 - Maio - 1941

União Eléctrica Portuguesa

S. A. R. L.

Rua Duque de Loulé, 240

PORTO

Telef. 2 830 P. B. X. e 90 Est.

CAPITAL { Acções . . . **40.000 contos**
Obrigações . . . **25 000 contos**

ELECTRICIDADE DO LINDOSO

FORÇA { instalada { hidráulica . **40.000** CV
térmica (reserva) **22.000** CV
já contratada . . . . . **30.000** CV
disponível . . . . . **10.000** CV

A **União Eléctrica Portuguesa** distribui e vende electricidade nos **distritos** de VIANA DO CASTELO, BRAGA, PORTO, AVEIRO, COIMBRA, VISEU e de LEIRIA, pela mais extensa rêde de alta-tensão em Portugal (mais de 1.000 kms), levando fôrça motriz às FÁBRICAS e luz a CIDADES, VILAS, ALDEIAS e LOGARES

A **U. E. P.** facilita a electrificação de Fábricas e oferece as maiores vantagens nas suas tarifas

Consultar a **U. E. P.** e consumir a **energia do Lindoso** é **proveitoso negócio**

CIMENTO

SECIL

Fabricado pelos mais modernos processos e preferido para todos os trabalhos de responsabilidade.

Sacos de papel ou de juta com 50 Kg.

Barricas de 180 Kg.

S E C I L

COMPANHIA GERAL DE CAL E CIMENTO

RUA DO COMERCIO, 56, 3.º

LISBOA

CIMENTO TEJO

FÁBRICA EM ALHANDRA

A instalação mais moderna do País. Dois fornos rotativos em laboração. — O "CIMENTO TEJO" marca pelas suas altas resistências e regularidade, garantidas pela fiscalização contínua de tôdas as fases do fabrico, exercida por técnicos portugueses especializados.

Pedidos à Companhia "CIMENTO TEJO"

SEDE EM LISBOA
RUA DA VITÓRIA, 88, 2.º

FILIAL NO NORTE
AV. DOS ALIADOS, 20, 3.º
PORTO

NÚMERO
120
Maio — 1941

TÉCNICA

REVISTA DE ENGENHARIA
DOS
ALUNOS DO INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Redacção e Administração: AV. ROVISCO PAIS, IST / LISBOA-N. / TEL. 49144 (linha 50)

DIRECTOR
CARLOS KRUS ABECASIS
ADMINISTRADOR
NUNO ABRANTES
BIBLIOTECÁRIO
LUIS DE ALMEIDA ALVES
CORPO REDACTORIAL
Vasco Mendes de Sousa
José Faria da Fonseca Santos
Militão Rosa Pereira
Silvério da Silva

NÚMERO AVULSO 5$00

ASSINATURAS:

	3 N.os	6 N.os	12 N.os
Continente e Ilhas	12$00	23$00	44$00
Colónias Portuguesas e Espanha...	—	30$00	55$00
Estrangeiro...	—	40$00	70$00

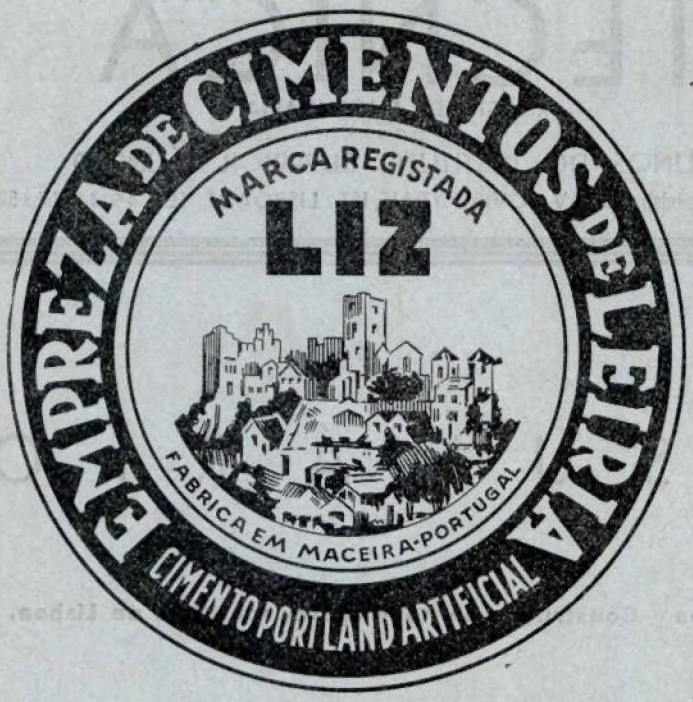
EDITOR E PROPRIETÁRIO
ASS. DOS ALUNOS DO I. S. T.

COMPOSTO E IMPRESSO
NAS
OFICINAS FERNANDES
RUA CRUZ DOS POIAIS, 103
LISBOA

SUMÁRIO

Capa — Construção da nova «gare» marítima de Lisboa.

		Págs.
A introdução da variável tempo na Termodinâmica e na Química	Eng. Químico-Industrial A. M. da Paixão	345
Critérios económicos para o cálculo de peças de betão armado à flexão composta . .	Eng.os Civis (E. E. I. C. C. P. — Madrid) José Luís Músquiz e António Angulo . .	351
O cálculo do Betão Armado aplicado aos edifícios	Eng. Civil J. de Cang . . .	367
Método aproximado para o cálculo directo da altura útil e da secção de armadura nas vigas T de betão armado . . .	Eng. Civil (I. S. T.) José Falagueiro Pinto Fonseca . .	390
Correias trapesoidais	F. de Almeida e Castro e E. C. Monteiro de Almeida	394
Vida escolar e associativa . . .	. . . . .	402
Pontos Modelos de Exame de Aptidão	. . . . .	403
Publicações recebidas	. . . . .	408



Cimento «Liz» hidrofugado «N»

PRÓPRIO PARA

IMPERMEABILIZAÇÃO DE OBRAS

REBOCOS, FUNDAÇÕES, PAREDES, ETC.

Substitue com vantagem de ordem técnica e económica todos os impermeabilizadores conhecidos.

Em sacos de papel de 50 quilos

Peçam instruções para o seu emprêgo

Sede: Rua do Cais de Santarém, 64, 1.º — LISBOA
Filial: Rua de Santo António, 190-A, 1.º — PORTO

Agentes em todo o País

"LUSALITE"

fibro-cimento nacional

EM

INCOMBUSTÍVEL
LEVE
RESISTENTE
ISOLADOR
IMPUTRESCÍVEL

Tubos para pressões hidráulicas de 3 a 12 K.os/cm.²
Chapas onduladas para coberturas
Chapas lisas para revestimento de tetos, tabiques, etc.
Produtos da Sociedade Portuguesa de Fibro-cimento

ÚNICOS CONCESSIONÁRIOS:

CORPORAÇÃO MERCANTIL PORTUGUESA, L.da

Rua de S. Nicolau, 123

Telefones: 2 2091 — 2 2092 — 2 2093 — **LISBOA** — Telegramas: Lusalite

— Uma —
Impermeabilização
perfeita
obtem-se com

SIKA

nas construções urbanas, industriais
e obras hidráulicas

SUPRIME HUMIDADES
EVITA INFILTRAÇÕES

FABRICANTES:
KASPAR WINKLER & C.º
Zürich — Altstetten (Suissa)

AGENTE-DEPOSITÁRIO EM PORTUGAL:
CARLOS ABREU BAPTISTA
Rua da Emenda, 111, 1.º—LISBOA
Telefone 26902

EMULSÕES

de asfalto para estradas

Todos os tipos e percentagens

TELEFONE 20879
Telegramas: Epalda—LISBOA

FÁBRICA EM SACAVÉM

A

Standard Electrica

TEM PARA ENTREGA IMEDIATA

ANALISADORES INDUSTRIAIS E DE RÁDIO—VOLTÍMETROS E AMPERÍMETROS PARA QUADROS
INSTRUMENTOS PADRÃO PARA LABORATÓRIOS—PINÇAS AMPEREMÉTRICAS
VERIFICADORES DE VÁLVULAS—OSCILADORES

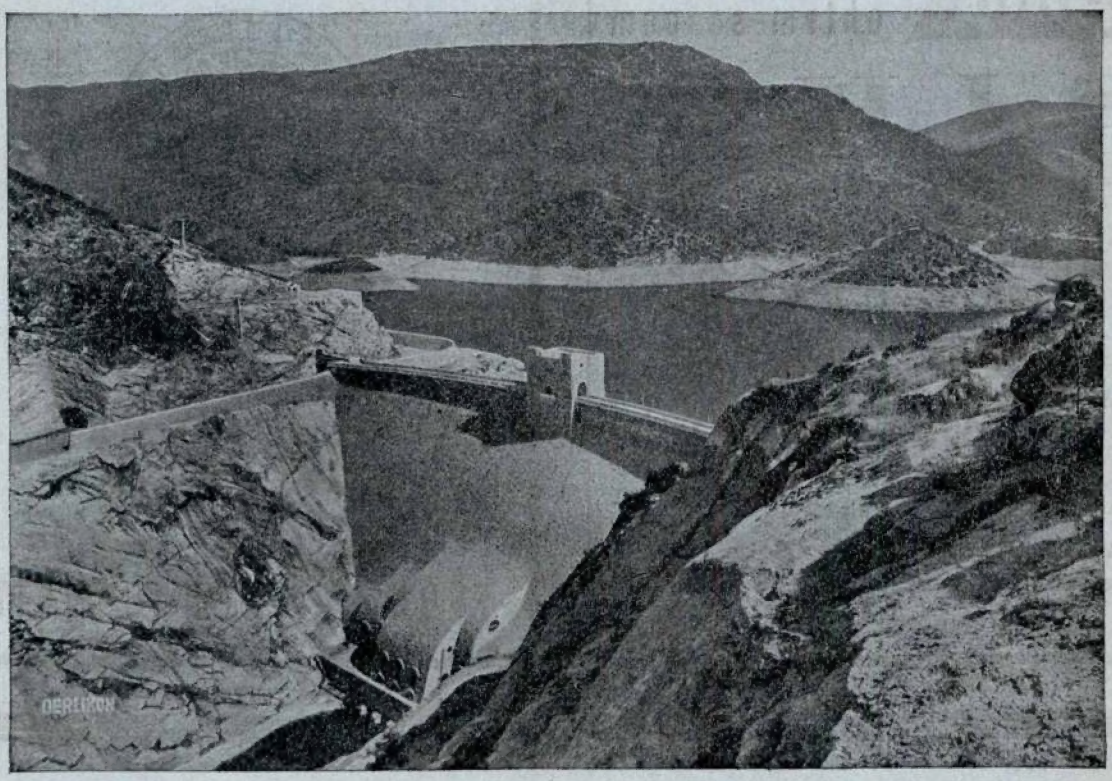
WESTON

MEGGERS PARA PROVA DE ISOLAMENTOS, PONTES WHEATSTONE
preparadas para a prova de linhas e cabos.
OSCILÓGRAFOS DE RAIOS CATÓDICOS, RESISTÊNCIAS,
CONDENSADORES, SOLDA RESINOSA, ETC.

das principais marcas

Telefones: P. B. X. 25890 e 26165 — Praça dos Restauradores, 47, 1.º-LISBOA

OERLIKON



Canalisatión y Fuerzas del Guadalquivir S. A. Madrid
Central do Jandula equipada com dois alternadores de 9500 KVA e um alternador de 3750 KVA
Todo o equipamento eléctrico fornecido por Oerlikon

PRODUTOS OERLIKON

Equipamentos eléctricos para centrais termo e hidro-eléctricas, subestações e instalações de distribuïção. Geradores e motores eléctricos de todos os tipos, transformadores, reguladores de indução, grupos convertidores, mutadores, turbinas a vapor e turbo geradores, gruas eléctricas, interruptores e aparelhos de manobra para alta e baixa tensão, aparelhos de protecção e relais de todos os tipos, equipamentos para soldadura eléctrica por arco, compressores e bombas de vácuo, electrolisadores, equipamentos eléctricos para locomotivas, automotoras eléctricas e diesel-eléctricas (via estreita e normal), tramwais, troley-buses, funiculares, teleféricos, etc.

Representante Geral para Portugal e Colónias

P. BELLASI

Pôrto // Rua Sá da Bandeira, 494, 3.° // Telefone 968

ATELIERS DE CONSTRUCTION OERLIKON
ZURICH-OERLIKON (SUIÇA)

45 816

Secção Cultural da A. E. I. S. T.

Conferência, acompanhada de experiências e projecções subordinada ao título

"A fotoelasticidade no ensino e na técnica"

proferida pelo Eng. Manuel Rocha

Assistente do I. S. T. - Bolseiro do I. A. C.

no anfiteatro de Química do I. S. T., às 21,30 de 11 de Junho de 1941

TÉCNICA
CARLOS KRUS ABECASIS
DIRECTOR

ANO XVI - N.º 120 MAIO 1941

A introdução da variável tempo na Termodinâmica e na Química

PELO ENGENHEIRO QUÍMICO-INDUSTRIAL A. M. DA PAIXÃO
(ASSISTENTE DO I. S. T.)

Na solução de novos problemas, na investigação de desconhecidas propriedades, a analogia é seguro auxílio e desinteressado guia; na crítica dos métodos, no confronto dos resultados, a comparação é indicador fiel e esclarecedor de confiança.

Mas, uma e outra, ao solicitarmos os seus préstimos, ao utilizarmos os seus serviços, exigem uma atenção firme e um critério adequado. A primeira, não admite enfraquecimentos nem deve dispersar-se por assuntos vários, solicitada por ideias diferentes, que, ora se nos afiguram correctas e simples e logo se revelam erradas e confusas; o segundo, não dispensa o estudo nem se conforma com a incerteza. Se utiliza a experiência, exige rigor de técnica e conhecimentos de factos; se utiliza o raciocínio, requere, a par da correcção lógica, clareza de ideias e simplicidade de conceitos.

Entre a Mecânica Química e a Mecânica Física existe, mesmo em superficial observação e leve confronto, uma harmonia, que encanta, uma concórdia, que agrada.

É sinal de beleza; revela, porém, um indício de imperfeição; é motivo de interêsse, é também, motivo de dúvida. Uma semelhança de definições, faz supor uma correspondência de fenómenos, a menos que se pretenda estabelecer uma aproximação, que nem sempre é justa e algumas vezes é discutível.

Ora, essa semelhança, que hoje julgamos perfeita, amanhã, insuficiente se manifesta; não sendo necessário substituir, obrigatório é, modificar; não sendo necessário corrigir, imprescindível se torna, generalizar.

Ao fazermos a comparação entre essas duas Mecânicas, as analogias, que se podem estabelecer entre os respectivos princípios, provam-nos uma vez mais, — verdade já conhecida — a constância das leis da Natureza.

Assim, por exemplo, paralelamente à lei de Newton, podemos nós enunciar a lei de Gibbs-Le Chatelier:

> «A evolução de um sistema químico provocada por uma determinada acção, é em sentido tal, que tende a anular essa acção;»

e à lei de Kepler é possível fazer corresponder um princípio que nos diz:

> «Se na evolução de um sistema, os factores iniciais se mantêm constantes, a velocidade de evolução é constante;»

sendo necessário, porém, generalizar a noção de velocidade, aplicando êsse têrmo mesmo a fenómenos, cuja resultante, não sendo observável directamente, é conhecida apenas, por considerações estatísticas, que nos dão uma idéia de conjunto.

* * *

A Termodinâmica é, em resumo, o estudo de dois princípios universais e das suas conseqüências. Porém, só no caso das transformações reversíveis é possível traduzir o princípio de Carnot por equações matemáticas. Uma transformação reversível é o limite comum para que tendem duas evoluções que se efectuam segundo uma série contínua de estados de equilíbrio, e realizáveis em sentidos inversos. Então, êsses dois princípios podem servir para a estruturação de uma Estática, mas, para passarmos das leis de equilíbrio para as leis de movimentos, teremos de adicionar às suas equações, termos complementares.

Como na Mecânica, a destruïção de um estado de equilíbrio implica um deslocamento, posto em evidência, no nosso caso, por uma transformação, tornando-se, porém, necessário estabelecer a diferença entre um repouso e um equilíbrio químico, aquele, não possuindo sequer as prerogativas de um falso equilíbrio.

E fácil seria estabelecer a analogia entre o repouso e equilíbrio químico e o repouso e equilíbrio mecânico. A um sistema químico é possível atribuir duas espécies de equilíbrio: um, em relação ao meio exterior, outro, pelo qual, os seus constituintes guardam a mesma composição e a mesma distribuïção. Vemos assim a possibilidade de evolução de um sistema químico sem variação de energia química, pois que, o estado químico de um sistema não é confundível com a sua energia, sendo apenas caracterizado pelo conjunto dos valores das diferentes espécies desta.

E podemos ainda estabelecer o critério da estabilidade ou instabilidade de equilíbrio pelo sinal da diferencial segunda de uma função, da qual, o anulamento da primeira, é a afirmação analítica da sua constância para qualquer modificação virtual, ou, real do sistema.

Vejamos agora, como é possível pela introdução da variável tempo, estabelecer a noção de velocidade de tranformação na evolução de um sistema químico.

Sabemos, que as grandezas termodinâmicas U, S, F e Φ possuem um significado físico perfeitamente estabelecido, se bem que, por vezes nos falte o conhecimento exacto dos estados elementares do sistema, que as considerações de probabilidade exigem. E sem alterar a definição e o seu significado façamos a seguinte hipótese:

> As grandezas U, S, F e Φ são funções, além das variáveis termodinâmicas, de uma nova variável, à qual atribuímos as dimensões de um tempo e designamos por x.

Para uma transformação, real ou virtual, a pressão e temperatura constantes, as condições de equilíbrio do sistema são:

$$1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial v} + p = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

juntamente com as condições

$$2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 F}{\partial v^2} > 0 \\[2ex] \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} > 0 \end{cases}$$

pois que Φ é mínimo.

Por definição de Φ é

$$\Phi = U - TS + pv = F + pv$$

e

$$3)\quad \frac{\partial \Phi}{\partial p} = \frac{\partial F}{\partial p} + p\frac{\partial v}{\partial p} + v$$

fazendo

$$v = \alpha\,(x, p, T)$$

vem

$$4)\quad \frac{\partial \Phi}{\partial p} = \alpha + \left(\frac{\partial F}{\partial v} + p\right)\frac{\partial \alpha}{\partial x}$$

$$5)\quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} + \left(\frac{\partial F}{\partial v} + p\right)\frac{\partial \alpha}{\partial x}$$

ou segundo (1)

$$6)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial p} = \alpha \\[2ex] \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

As condições (6) serão equivalentes às condições (1) se fôr

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} > 0$$

Em (3) substituindo v por α e derivando em ordem de T, vem

$$\frac{\partial \Phi}{\partial T} = \frac{\partial F}{\partial T} = -S$$

Por definição de energia total,

$$U = F + TS = \Phi - pv + TS$$

vem

$$U = \Phi - T\frac{\partial \Phi}{\partial T} - p\alpha$$

Sendo dQ a quantidade de calor posta em jôgo numa transformação elementar, real ou virtual, será:

$$E\,dQ = d\left[\Phi - T\frac{\partial \Phi}{\partial T} - p\alpha\right]$$

que é a expressão do princípio de equivalência.

Consideraremos as condições (1) novamente

$$1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial v} + p = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

diferenciamos $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 0$ e substituindo o valor de dv dado por

$$dv = \frac{\partial \alpha}{\partial x}dx + \frac{\partial \alpha}{\partial p}dp + \frac{\partial \alpha}{\partial T}dT$$

vem

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial' F}{\partial x\,\partial v}\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)dx + \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial v}\frac{\partial \alpha}{\partial p}dp +$$

$$+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial T} + \frac{\partial^2 F}{\partial x\,dv}\frac{\partial \alpha}{\partial T}\right)dT = 0$$

ou, atendendo a 3), 5) e 1)

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\,\partial p}dp + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial T^2}dT = 0$$

que será a equação geral da nossa teoria.

A equação

$$6)\qquad \frac{\partial \Phi}{\partial p} = \alpha$$

dá-nos a pressão e temperatura constantes

$$dv = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\,\partial p}dx$$

e será

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\,\partial p} > 0 \qquad (dx\,\partial p < 0)$$

se a variação do volume fôr do mesmo sentido do que a variação do tempo, ou

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\,\partial p} < 0 \qquad (\partial x\,\partial p > 0)$$

se o volume variar em sentido contrário.

* * *

A introdução da variável tempo nos raciocínios termodinâmicos, conduz-nos à noção de velocidade de transformação, — qualquer que seja a natureza — essa velocidade, não sendo mais do que a relação entre a marcha do fenómeno e o decorrer do tempo.

Como causa das transformações químicas apresentava-se um factor — a afinidade — à qual, se atribuía o significado de uma fôrça, cuja acção provocava a evolução do sistema por reacção.

Porém, tal fôrça devia anular-se obrigatòriamente, quando o sistema atingisse o estado de

equilíbrio. Dêste modo necessário foi modificar o conceito de afinidade, que passou a ser considerada como a resultante das acções, que mantêm unidos os elementos de um composto, cujo valor é igual e de sinal contrário à derivada da energia livre em relação ao número das moléculas.

Num determinado estado de equilíbrio, o potencial termodinâmico é mínimo e a sua derivada em relação à concentração molecular é, pois, idênticamente nula. A afinidade mede-se assim, pelo trabalho máximo desenvolvido pelo sistema numa evolução entre dois estados bem definidos. A velocidade de evolução será, então, uma função das concentrações moleculares dos corpos, que se transformam uns nos outros.

Chama-se coeficiente de reacção, à variação da concentração durante um certo intervalo de tempo; o limite do coeficiente de reacção, quando êsse intervalo de tempo tendo para zero, é a velocidade de reacção. Isto exige uma variação contínua da concentração em função do tempo, o que pode não ser verdade e para isso suficiente é a existência de uma fôrça, actuando sôbre o sistema.

E neste momento, aproveitemos a ocasião para estabelecer, por analogia, o conceito de aceleração de reacção: o limite para que tende a relação entre a diferença dos valores da velocidade de reacção em dois instantes, para o intervalo do tempo, quando êste tende para zero.

Notemos o paralelismo das definições sem deixarmos de frisar a diferença de conceitos.

A lei da acção de massa domina tôda a Mecânica Química e a equação v'ant Hoff permite-nos estabelecer uma ligação entre esta e a Termodinâmica.

Mas a tradução analítica da lei da acção de massa sendo correcta, não é geral e, a maneira clássica de enunciar a hipótese fundamental da cinética química, se não é errada, é imperfeita.

A primeira, não dá conta dos fenómenos de transformação ou transição da fase; a segunda, não estabelece as condições de suficiência, que invalidem as conclusões em contradição com os resultados experimentais, nem prevê as condições necessárias, para que a evolução do sistema se realize em determinado sentido.

Diz-se, que um sistema é termodinâmicamente estável, se a sua evolução é uma conseqüência da variação dos parâmetros definidores, e, consideramos um sistema como quìmicamente inerte, se a sua evolução só se produz como conseqüência de uma acção estranha.

Fixadas estas definições consideremos, então, um sistema químico não quìmicamente inerte e termodinâmicamente estável, com um número i arbitrário de constituintes, podendo admitir várias fases s, as reacções efectuando-se segundo o esquema

$$7) \qquad \Sigma_i \left(a_i^s\right)^{m_i^s} = 0 \qquad \begin{cases} i = 1, 2, 3 \ldots \\ s = 1, 2, 3 \ldots \end{cases}$$

em que m_i^s é um índice quantitativo, isto é, o número de moléculas, com que um determinado constituinte entra na reacção química, cuja representação simbólica é (7).

Se considerarmos a velocidade de reacção como sendo uma função da concentração, aquela tendendo para zero com esta, a velocidade será máxima no instante inicial, o que só é verdade no caso dos sistemas termodinâmicamente estáveis e não quìmicamente inertes.

Se estes são em grande número, maior é o número daqueles que o não são.

Consideremos a concentração como uma fracção molecular o que nos permite escrever

$$C_i^s = \frac{N_i^s}{\Sigma_i N_i^s}$$

O coeficiente de reacção será:

$$\theta = \frac{N_i^s - N_i'^s}{t' - t} = \frac{n_i^s}{t' - t}$$

Em cada instante, o número total de moléculas é a soma do número de moléculas formadas, ou, destruidas, com o número de moléculas restantes.

A velocidade de reacção será:

$$\lim_{t'-t=0} \theta = \frac{d\, n_i^s}{d\, t}$$

Consideremos a variação do número de moléculas durante um certo intervalo de tempo

como uma função dêsse mesmo número de moléculas.

$$\frac{d N_i^s}{d t} = \Theta (N_i^s)$$

Façamos

$$\Theta (N_i^s) = \Theta (N'^s_i + n_i^s)$$

sendo n_i^s o acréscimo positivo, ou, negativo do número de moléculas num determinado intervalo de tempo, é

$$\Theta (N'^s_i + n_i^s) = \Theta (N'^s_i) + n_i^s \Theta' (N'^s_i) + \frac{(n_i^s)^2}{2!} \Theta'' (N'^s_i) + \ldots$$

A velocidade de reacção é dada por

$$8) \quad \frac{d n_i^s}{d t} = n_i^s \Theta' (N'^s_i) + \frac{(n_i^s)^2}{2!} \Theta'' (N'^s_i) + \ldots$$

No instante de equilíbrio é

$$\frac{d n_i^s}{d t} = 0$$

e portanto

$$9) \quad n_i^s \Theta' (N'^s_i) + \frac{(n_i^s)^2}{2!} \Theta'' (N'^s_i) + \ldots = 0$$

que será a condição geral de equilíbrio de um sistema químico evoluindo por reacção.

Façamos as seguintes hipóteses:

1.ª — A função $\Theta (N_i^s)$ é linear e homogénea em relação aos N_i^s.

Então $\Theta' (N'^s_i)$ é, por definição, o potencial químico de Gibbs generalizado e a função

$$\Phi = \Sigma_s \Sigma_i n_i^s \Theta' (N'^s_i) = \Sigma_s \Sigma_i n_i^s \varphi_i^s + R T \Sigma_s \Sigma_i n_i^s \log C_i^s$$

é o potencial termodinâmico total do sistema completo.

A velocidade de evolução será

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial n} \frac{d n}{d t}$$

Se considerarmos p e T constantes, as condições de equilíbrio do sistema são

$$\begin{cases} \Sigma_s \Sigma_i \varphi_i^s + R T \Sigma_s \Sigma_i \log C_i^s = o \text{ (a)} \\ \dfrac{d n_i^s}{d t} = o \end{cases}$$

A condição (a) dá-nos imediatamente a lei da acção de massa generalizada:

Sendo m_i^s um número inteiro positivo, ou, negativo é

$$-\frac{1}{R T} \Sigma_s \Sigma_i m_i^s \varphi_i^s = \Sigma_s \Sigma_i m_i^s \log C_i^s = \log K$$

o que se pode escrever sob a forma

$$\prod_s \prod_i \left(C_i^s\right)^{m_i^s} = K$$

O significado físico de m_i^s fica assim perfeitamente estabelecido.

2.ª — Que a variação $\frac{\partial \Theta}{\partial N_i^s}$ é realizada de maneira tal, que o equilíbrio de temperatura se mantém de uma maneira perfeita;

isto é, as coordenadas das moléculas e os respectivos momentos conjugados estão distribuídos de acôrdo com a lei de Maxwel-Boltzmann.

Então, para uma determinada célula do espaço das fases ou para um determinado estado quântico caracterizado por um valor particular da energia, a concentração molecular é dada por

$$C_i^s j = \frac{N_i^s j}{\Sigma_i N_i^s} = \frac{P_j e^{-\varepsilon j/kT}}{\Sigma_r P_r e^{-\varepsilon r/kT}}$$

e a velocidade de reacção será

$$-\frac{d C_i^s j}{d t} = \frac{\Sigma_j \vartheta_j N_i^s P_j e^{-\varepsilon j/kT}}{\Sigma_r P_r e^{-\varepsilon r/kT}}$$

em que θ_j é o coeficiente de reacção relativo ao estado quântico j.

E teremos para

$$\Theta'(N_i'^s) = \frac{\Sigma_j \theta_j P_j e^{-\varepsilon_j/kT}}{\Sigma_r P_r e^{-\varepsilon_r/kT}}$$

É evidente que a expressão de $\theta'(N_i'^s)$ depende do coeficiente de reacção, isto é, em última análise, do seu mecanismo.

Fiquemos por aqui.

Os resultados obtidos pela aplicação dos princípios da Mecânica Estatística à Cinética Química não são susceptíveis de uma análise e discussão em artigos desta natureza. As considerações sôbre os estados elementares sem os quais o conceito da probabilidade não tem significado nem sentido, exigem o estudo prévio de fenómenos, que fazem variar o número de moléculas do solvente ou dos corpos dissolvidos. Ora, os fenómenos ligados à acção de massa fazem parte desta categoria. O potencial termodinâmico é definido em relação a um estado normal de referência e considerado como proporcional a uma grandeza, que é igual ao limite da concentração molecular, quando esta tende para zero.

Por esta razão não podemos deixar de considerar o fenómeno de dissociação, e, se no caso dos sistemas químicos onde intervêm apenas fôrças quânticas de ressonância o problema não tem dificuldade de maior, tal não acontece se entre os iões se exercem fôrças electro-estáticas intensas.

Porém, o primeiro problema só é susceptível de uma generalização se o considerarmos, como um caso particular do segundo, em que o termo complementar do potencial termodinâmico, que nos dá a influência das fôrças eléctricas sôbre o sistema químico, se anula.

Critérios económicos para o cálculo de peças de betão armado à flexão composta

PELOS ENG.os CIVIS (E. E. I. C. C. P. — MADRID) JOSÉ LUÍS MÚSQUIZ
ANTÓNIO ANGULO

Com o presente artigo tem a «Técnica» a honra — que à nossa Escola igualmente cabe — de dar início a um vasto plano de intercâmbio científico e técnico luso-espanhol. Um dos seus autores, o Eng. José Luís Músquiz, visitou há poucos meses o nosso País em missão do Conselho Superior de Investigações Científicas de Espanha, com o objectivo de estudar a possibilidade de tal intercâmbio.

É para nós grande alegria o facto de ser a nossa Revista a primeira a demonstrar pràticamente tal possibilidade. E auguramos feliz êxito ao empreendimento — a bem da Ciência e da Técnica e a bem das duas Nações irmãs da Península, que, melhor se conhecendo, mais se hão-de estimar e admirar.

Aos ilustres Autores os nossos melhores agradecimentos pelo seu interessante artigo.

I

A escassez do aço no momento actual obriga-nos a procurar critérios de economia ao projectar as secções de betão armado, de modo que a área total das armaduras seja a menor possível, sempre que daí não resulte um aumento excessivo das dimensões da secção. Há que advertir que estes critérios de economia não podem seguir-se de modo absoluto, pois muitas vezes intervêm outros factores que nos fixam as dimensões da secção (considerações estéticas, necessidade de peças de certa rigidez, aproveitamento do mesmo tipo de cofragem, etc.).

Simultâneamente, a boa qualidade dos nossos cimentos permite-nos alcançar tensões de trabalho, do betão, de mais de 70 kg/cm², e utilizar coeficientes de equivalência aço-betão inferiores a $m = 15$.

No moderno «Regulamento Espanhol» de 3 de Fevereiro de 1939, adopta-se um valor de m variável com a carga de rotura do betão em cubos (1)

Para C = 270 a 320 kg/cm²	m = 8
Para C = 190 a 270 kg/cm²	m = 10
Para C = 130 a 190 kg/cm²	m = 15
Para C = 100 a 130 kg/cm²	m = 20

E em Portugal são notáveis os trabalhos realizados pelo Eng.º Vieira Barbosa, no Laboratório da Faculdade de Engenharia do Pôrto, dos quais se conclue que deve adoptar-se um coeficiente $m = 10$, dada a óptima qualidade dos cimentos portugueses.

Estas considerações levaram-nos a procurar ábacos em que o valor de m possa ser variável.

Partiremos para tal da fórmula de Peña Boeuf (2) que nos relaciona o coeficiente de equivalência m com a tensão de rotura do betão,

(1) Se se empregarem provetes cilíndricos obtêm-se resistências um pouco inferiores.

(2) Peña Boeuf — Hormigon Armado — 1933, pág. 82.

(1) $$m = \frac{2315}{C},$$

obtida da fórmula do coeficiente de elasticidade de Ritter para tensões de trabalho

(2) $$B = 0{,}28\ C$$ [1]

donde

$$C = \frac{B}{0{,}28};$$

e portanto $m\,B = 648$

(3) $$\boxed{m\ B = 648}$$

No caso de se empregarem betões de outras características podem utilizar-se os resultados obtidos com a pequena correcção que oportunamente assinalaremos.

Outra vantagem que nos oferecem os ábacos é a de conhecer em cada ponto a relação

(4) $$\varphi = \frac{\text{secção da armadura da compressão}}{\text{secção da armadura de tracção}}$$

e a quantidade

(5) $$q = \frac{\text{secção da armadura de tracção}}{\text{secção do betão}}$$

com que trabalhamos.

(6) $$B = \frac{M}{I}\alpha h;$$

e a distância do ponto de aplicação da carga à fibra neutra em função dos momentos de inércia e estático (ambos em relação à fibra neutra):

(7) $$n = e - \frac{h}{2} + \alpha h = \frac{I}{S}$$

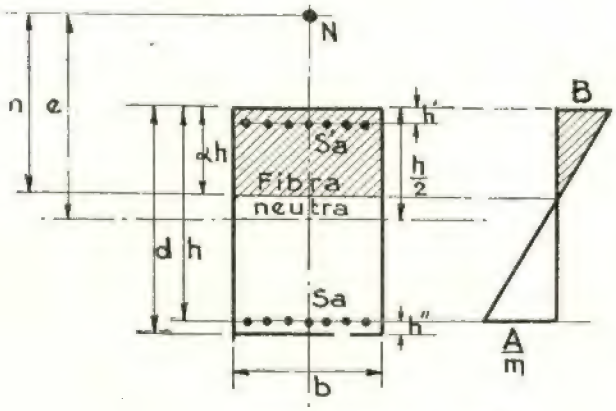
Para a determinação dos valores de I e S supomos que

(8) $$h' = 0{,}1\ h$$

hipótese verificada na prática nos casos correntes.

(9) $$I = \int_0^{\alpha h} b^2 . x^2 . dx + b\,h\,m\,q\,h^2 (1-\alpha)^2 + b\,h\,m\,q\,\varphi\,h^2 (\alpha - 0{,}1)^2 = b\,h^3 \left[\frac{\alpha^3}{3} + m\,q\,\varphi\,(\alpha - 0{,}1)^2 + m\,q\,(1-\alpha)^2\right]$$

(10) $$S = \int_0^{\alpha h} b . x . dx + b\,h^2\,m\,q\,\varphi\,(\alpha - 0{,}1) - b\,h^2\,m\,q\,(1-\alpha) = b\,h^2 \left[\frac{\alpha^2}{2} + m\,q\,\varphi\,(\alpha - 0{,}1) - m\,q\,(1-\alpha)\right]$$



C = tensão de rotura do betão em cubos.
B = tensão de trabalho do betão em kg : cm².
m = coeficiente de equivalência.
A = tensão de trabalho do aço em kg : cm²
n, e, d, b, h, em cm.
N em kg.
M em kg cm.
I = momento de inércia da secção em relação à fibra neutra.
S = momento estático da secção em relação à fibra neutra

$$q = \frac{S_a}{b\,h} \qquad \varphi = \frac{S'_a}{S_a}$$

Fig. 1

Para o traçado dos ábacos partimos das fórmulas conhecidas que nos dão a tensão de trabalho do betão em função do momento flector e do momento de inércia da secção:

Substituindo estes valores nas fórmulas (6) e (7), obtemos

(11) $$e - \frac{H}{2} + h = h\,\frac{\frac{\alpha^3}{3} + m\,q\,\varphi\,(\alpha - 0{,}1)^2 + m\,q\,(1-\alpha)^2}{\frac{\alpha^2}{2} + m\,q\,\varphi\,(\alpha - 0{,}1) - m\,q\,(1-\alpha)}$$

[1] Êste coeficiente de redução 0,28 é também empregado no Regulamento Francês.

(12)

$$B = \frac{N}{S}\alpha h = \frac{N}{bh}\frac{\alpha}{\frac{\alpha^2}{2} + m q \varphi (\alpha - 0{,}1) - m q (1 - \alpha)}$$

Para maior facilidade de cálculo introduzimos os coeficientes:

(13) $\xi = (\text{excentricidade específica}) = \frac{e}{h}$

e

(14) $$\omega = \frac{B b h}{N}$$

cujas expressões são:

(15) $$\xi = \left(\frac{1}{2} - \alpha\right) + \frac{\frac{\alpha^3}{3} + m q \varphi (\alpha - 0{,}1)^2 + m q (1 - \alpha)^2}{\frac{\alpha^2}{2} + m q \varphi (\alpha - 0{,}1) - m q (1 - \alpha)}$$

16) $$\omega = \frac{\alpha}{\frac{\alpha^2}{2} + m q \varphi (\alpha - 0{,}1) - m q (1 - \alpha)}$$

Como resulta das equações (13) e (14) estes coeficientes são independentes da secção da armadura, e podem determinar-se directamente conhecendo as dimensões da peça e a tensão de trabalho do betão.

Nos ábacos que vamos traçar tomá-los-emos como coordenadas, mas antes de proceder ao traçado daqueles, dada a actual escassês do aço, convém ter um critério sôbre a disposição de armaduras mais económica para as características e modo de trabalho das peças.

Para isso partimos dos resultados de Mayer [1] e Jahn [2], que nos dão a tensão de aço mais favorável para obter uma secção total de armaduras mínima.

Esta tensão é:

(17) $$A = \frac{m B Z}{1 - Z}$$

sendo

(18) $$Z = \sqrt{\frac{2 N n}{h^2 b B}}$$

[1] Die Wirtschaftlichkeit als Konstruktionprinzip im Eisenbetonbau — J. Springer — Berlim — pág. 68.

[2] Bauingenieur — 1924 — n.º 6 — pág. 137.

Do diagrama de tensões da peça deduz-se:

(19) $$A = m B \frac{1 - \alpha}{\alpha}$$

e portanto a condição de armadura mínima é

(20) $$1 - \alpha = Z = \sqrt{\frac{2 N n}{h^2 b B}}$$

Tendo em conta as equações (7), (13) e (14):

(21) $$1 - \alpha = \sqrt{\frac{2\xi - 1 + 2\alpha}{\omega}}$$

donde

(22) $$\omega = \frac{2\xi - 1 + 2\alpha}{(1 - \alpha)^2},$$

equação que nos exprime a relação que deve existir entre ω, ξ, α para que a secção total da armadura seja mínima.

Combinando a equação (22) com as equações (15), (16) e (19) temos um sistema de 3 equações às incógnitas ξ, ω, α, φ, mq.

Dando valores a α na equação (22) obtemos, no sistema de eixos $\xi - \omega$, um feixe de rectas, cada uma das quais corresponde a um valor de α e portanto a uma tensão de trabalho do aço dada (visto que, segundo a equação (3), supomos m B constante e igual a 648).

Se eliminarmos mq entre as equações (15) e (16) obtemos a expressão:

(23) $$\omega = \frac{\xi - \frac{1}{2} + \alpha - \frac{(1 - \alpha)^2 + \varphi (\alpha - 0{,}1)^2}{1 - \alpha - \varphi (\alpha - 0{,}1)}}{\frac{\alpha^2}{3} - \frac{\alpha}{2}\frac{(1 - \alpha)^2 + \varphi (\alpha - 0{,}1)^2}{1 - \alpha - \varphi (\alpha - 0{,}1)}}$$

que nos dá para cada valor de φ outro feixe, em que cada curva corresponde a um valor de α. A intersecção destas curvas com o feixe de rectas da equação (22) dá outro feixe de curvas que nos representa, no referido sistema de eixos $\xi - \omega$, a tensão de trabalho do aço mais favorável para cada valor φ.

Assim por exemplo, para o feixe correspondente a $\varphi = 1$ obtemos a curva representada na fig. 2.

Estudando esta curva vemos que para pequenas excentricidades (até 1,5 aproximadamente) a tensão de trabalho mais económica varia muito com a excentricidade. Quando esta aumenta, a tensão tende a tornar-se constante e igual a 1200 kg/cm², conseqüência lógica visto que nos vamos aproximando do caso de flexão simples, no qual convém que as armaduras trabalhem ao máximo admissível.

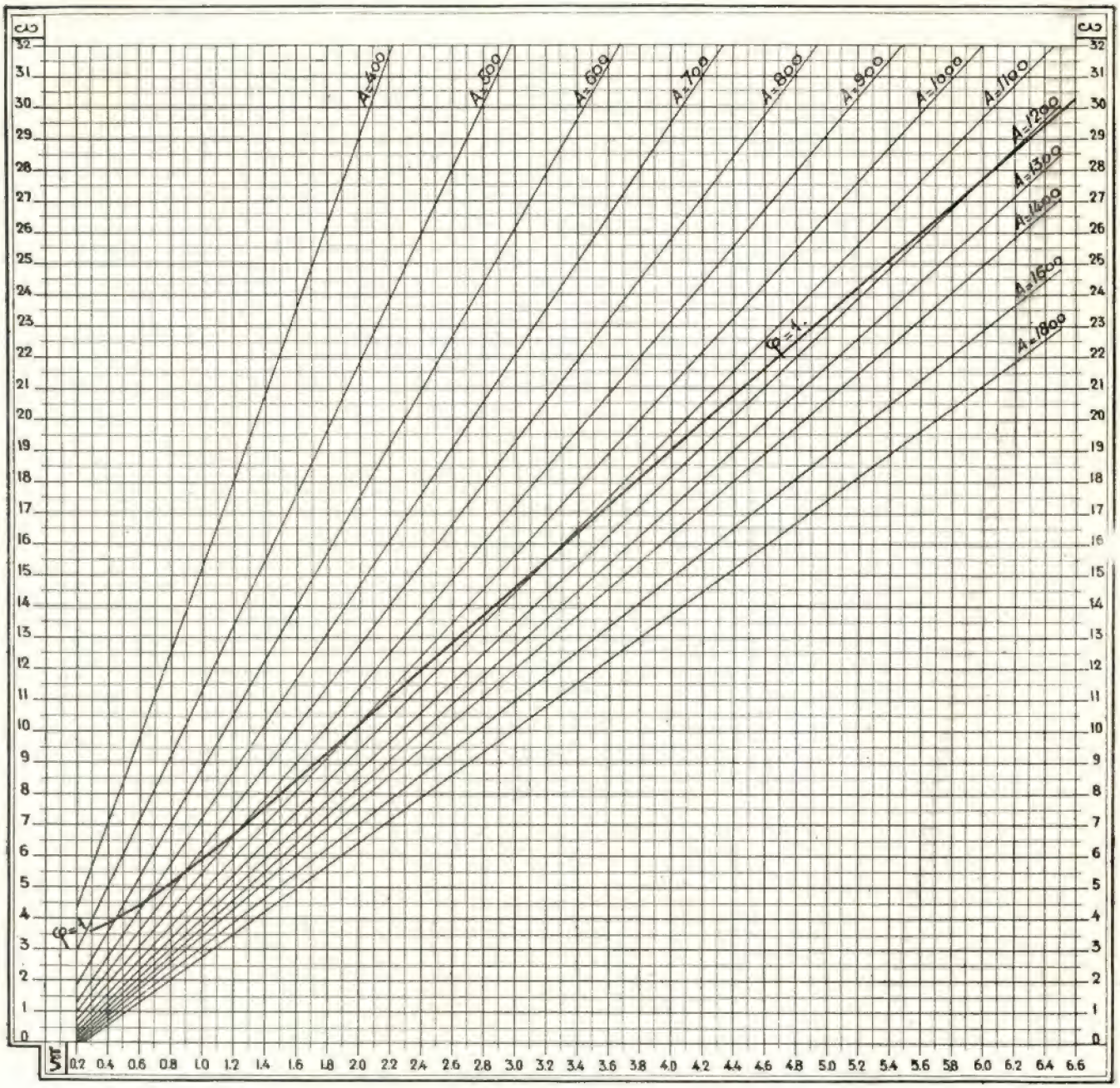


Fig. 2

No traçado dos ábacos que adiante se inserem, teremos presentes estes resultados, desenhando um para pequenas e outro para grandes excentricidades.

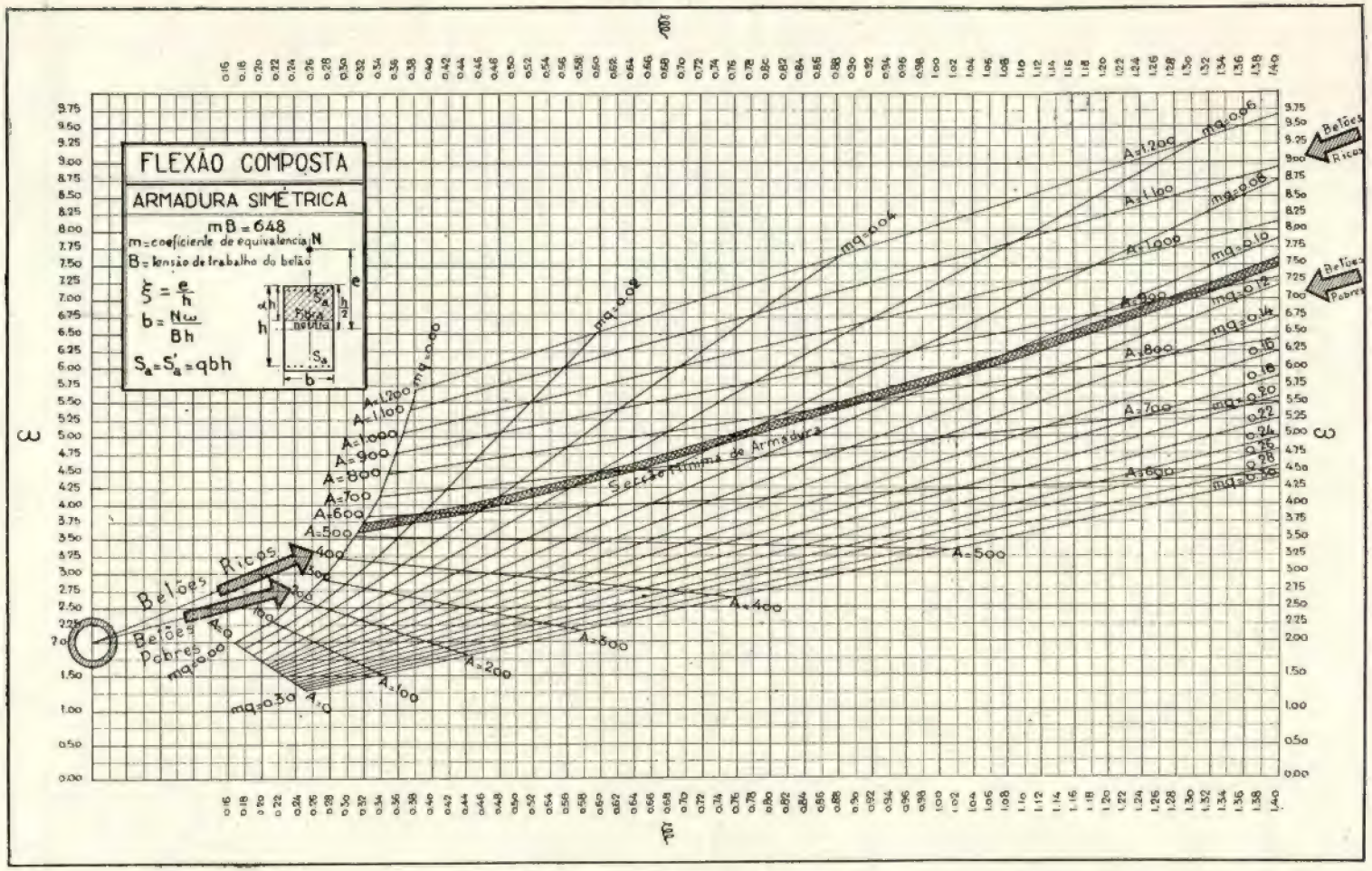


Fig. 3 — Ábaco para cálculo de secções rectangulares de betão armado à flexão composta. Pequenas excentricidades

Generalização das fórmulas e ábacos

Se empregarmos tensões de trabalho do betão diferentes das que resultam de admitir a hipótese $m B = 648$, indicada por Peña Boeuf, podemos utilizar as fórmulas e ábacos sem outra alteração que não seja a resultante de multiplicar a tensão de trabalho do aço obtida nos gráficos por $\frac{m B}{648}$, como se deduz da equação (19).

Temos portanto

$$(24) \qquad A' = A \text{ (do ábaco) } \times \frac{m B}{648}$$

II

1.º — Excentricidades pequenas.

Como já vimos, neste caso a tensão de trabalho mais favorável do aço varia muito com a excentricidade, pelo que traçámos o ábaco representado na fig. 3 para diferentes tensões de trabalho do aço.

Tratando-se de pequenas excentricidades, não há vantagem em empregar secções diferentes de armadura nas zonas de compressão e de tracção, e por isso traçámos o ábaco ùnicamente para armaduras simétricas.

Para o seu traçado partimos das equações (23) e (19) fazendo $\varphi = 1$ e tendo em atenção que $m B = 648$.

A equação (23) representa no sistema de eixos $\xi \omega$ um feixe de rectas, correspondendo cada uma delas a uma tensão dada do aço.

As curvas $mq =$ const. poderiam achar-se eliminando α entre as equações (15) e (16), mas em face da dificuldade material de o fazer, preferimos obtê-las dando valores a $m\ q$ e a α na equação (16), e marcar os valores de ω achados nas rectas anteriormente desenhadas, correspondentes a tensões dadas do aço e portanto a valores dados de α.

No ábaco desenhámos a curva correspondente à secção mínima de armadura total, obtida de acôrdo com as considerações acima expendidas.

Se quisermos agora estudar a secção mais económica tendo em conta não apenas a quantidade de aço mas também a do betão, procederemos do modo seguinte:

Chamando p e p' aos preços do metro cúbico de betão e da tonelada de aço, respectivamente, o custo do metro linear da peça será:

$$(25) \qquad P = b\,h \left(p + \frac{q\,(1 + \varphi)\,p'}{7{,}85} \right)$$

e tendo em conta as equações (3) e (14):

$$(25) \qquad P = N\omega \left(\frac{p}{B} + \frac{q}{B}\,\frac{(1 + \varphi)\,p'}{7{,}85} \right) =$$

$$= N\omega \left(\frac{p}{B} + m\,q\,\frac{(1 + \varphi)\,p'}{5087} \right)$$

Suponhamos agora dois tipos de betão: o primeiro fortemente doseado e com cuidadosa constituïção de material inerte, de modo a poder resistir a uma tensão de trabalho de 80 kg/cm², e o segundo com fraca dose de cimento e não tão bem executado, capaz de suportar apenas 40 kg/cm².

A relação $\frac{p'}{p}$ num e noutro caso é aproximadamente 6 e 8 (1).

Substituindo estes números na expressão (25) e dando a ω e $m\,q$ os valores que se obtém do ábaco, resulta, como se verifica tacteando, que as secções mais económicas são as das proximidades das linhas rectas, assinaladas no ábaco com flechas, traçadas uma para betões ricos ou de grande resistência e a outra para betões pobres ou de fraca resistência.

Do estudo desta recta e da curva correspondente à secção mínima de armaduras, tiramos as seguintes conclusões:

1.ª — Tratando-se de mínimos em que há pouca variação utilizando pontos próximos das linhas citadas, podemos dizer que as secções de armadura mínima quási coïncidem com as mais económicas;

2.ª — Para excentricidades relativas compreen-

(1) Com os preços actuais, em Espanha, de 1.400 Pts. a tonelada de aço e de 240 e 180 Pts. o metro cúbico de betão de um e outro tipos.

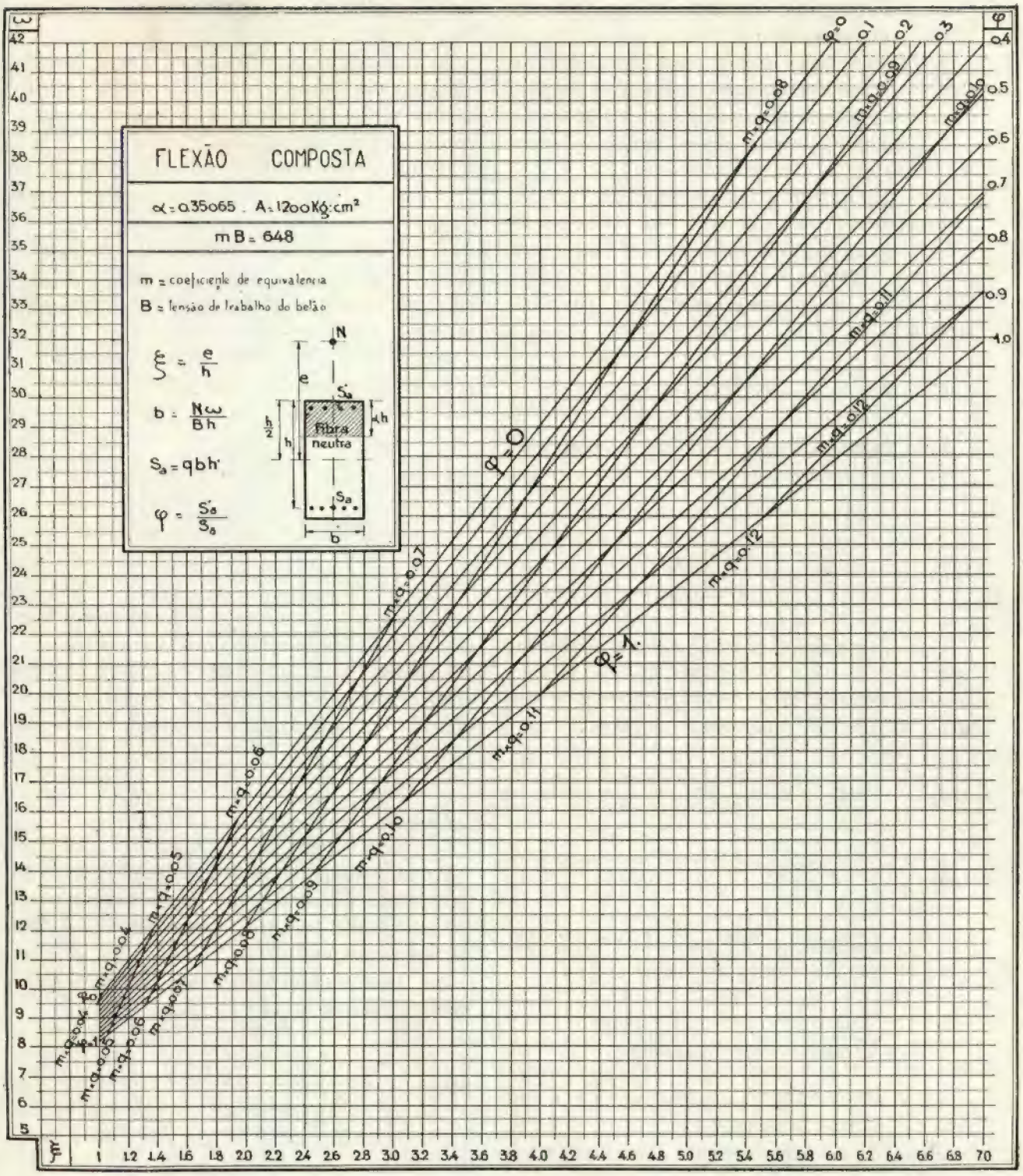


Fig. 4 — Ábaco para cálculo de secções rectangulares de betão armado à flexão composta
Grandes excentricidades

didas entre 0 e 0,8, obtém-se menor secção de aço com betões ricos do que com betões pobres, sucedendo o contrário para excentricidades maiores que 0,8;

3.ª — Da simples observação dos ábacos se deduz que são muito mais económicas as percentagens pequenas que as grandes, não sendo conveniente empregar doses correspondentes a valores de $m\,q$ superiores a 0,15;

4.ª — Empregando betões ricos em vez de pobres, obtém-se economias que atingem 20 a 25 % do custo; isto deduz-se tendo em conta a relação 8/6 entre os preços dos betões dos dois tipos e as dimensões das peças deduzidas do ábaco.

Caso de excentricidades muito pequenas.

Para excentricidades menores pode aplicar-se a fórmula da compressão excêntrica

$$B = \frac{N\left(1 + \frac{6e}{d}\right)}{b\,d\,(1 + 2\,m\,q)} \tag{27}$$

Como, segundo os Regulamentos português (art. 40.º) e espanhol (art. 36.º), se podem admitir tensões de trabalho no betão iguais a 1/4 da máxima compressão, teremos:

$$\frac{6e}{d} - 1 \leqslant \frac{1}{4}\left(1 + \frac{6e}{d}\right); \quad \frac{e}{d} \leqslant \frac{5}{18} \text{ e portanto} \tag{28}$$

$$\xi = \frac{e}{h} \leqslant \frac{5 \times 1{,}1}{18} = 0{,}30 \tag{29}$$

o que nos indica que a fórmula (27) é aplicável para as excentricidades inferiores a 0,30.

2.º — Grandes excentricidades.

Para excentricidades superiores a 1,2, a tensão de trabalho do aço correspondente à secção mínima de armaduras está compreendida, segundo a curva obtida acima (fig. 2), entre 900 e 1300 kg/cm².

Poderíamos ter desenhado um ábaco para cada uma destas tensões, mas julgámos mais conveniente traçar apenas o correspondente à tensão de 1200 kg/cm², máxima admitida pelo Regulamento espanhol, estudando em compensação as diferentes secções para uma variação de φ de 0 a 1.

A diminuïção de armaduras que se obteria empregando outra tensão de trabalho, verificámos ser muito pequena e não compensar a construção de outro ábaco.

A fig. 4 representa um ábaco para cálculo de peças à flexão composta, supondo que a tensão de trabalho do aço é de 1200 kg/cm².

Como, segundo as equações (2) e (19), α é constante e igual a 0,35065, dando valores a φ na equação (23), obtemos as rectas correspondentes a $\varphi = \text{const.}$

As linhas $m\,q = \text{const.}$ obtêm-se eliminando φ entre as equações (15) e (16). Chegamos assim à expressão:

$$\omega = \frac{\alpha\,(\xi - 0{,}4)}{0{,}9\,m\,q\,(1 - \alpha) + \frac{0{,}1\,\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^3}{6}} \tag{30}$$

Dando diferentes valores a $m\,q$, obtemos também um feixe de rectas. Verificámos, tacteando, que as secções mais económicas correspondem a valores de φ compreendidos entre 0 e 0,3, quere dizer, a armadura assimétrica ou muito fraca armadura de compressão.

Caso de flexão simples

Ao aumentar a excentricidade, chegamos ao caso particular em que a fôrça se anula e a excentricidade se torna infinita, isto é, ao caso da flexão simples.

Na Tabela junta e no ábaco da fig. 5, obtemos os valores de $m\,q$ e Ω:

$$\Omega = \frac{1}{\frac{\alpha^2}{3} + \frac{\alpha}{2}\,\frac{(1-\alpha)^2 + \varphi\,(\alpha - 0{,}1)^2}{1 - \alpha - \varphi\,(\alpha - 0{,}1)}} \tag{31}$$

para diferentes tensões de trabalho do aço e diferentes valores do coeficiente φ, de relação entre as armaduras de tracção e de compressão.

Tabela para o cálculo de peças rectangulares de betão armado trabalhando à flexão simples

m q				φ	Ω			
A = 800	A = 1000	A = 1200	A = 1400		A = 800	A = 1000	A = 1200	A = 1400
0,18124	0,12739	0,09468	0,07322	0	5,253	5,854	6,458	7,067
0,19341	0,13386	0,09848	0,07562	0,1	4,905	5,562	6,204	6,842
0,20733	0,14102	0,10260	0,07817	0,2	4,559	5,270	5,951	6,617
0,22340	0,14899	0,10707	0,08091	0,3	4,216	4,980	5,698	6,392
0,24218	0,15792	0,11196	0,08384	0,4	3,875	4,690	5,445	6,168
0,26440	0,16798	0,11732	0,08700	0,5	3,536	4,402	5,193	5,943
0,29111	0,17941	0,12321	0,09039	0,6	3,201	4,114	4,941	5,718
0,32382	0,19251	0,12973	0,09407	0,7	2,867	3,828	4,689	5,494
0,36482	0,20767	0,13697	0,09806	0,8	2,536	3,542	4,438	5,269
0,41771	0,22543	0,14508	0,10240	0,9	2,207	3,257	4,187	5,045
0,48853	0,24651	0,15419	0,10714	1	1,880	2,974	3,937	4,820

Flexão simples

Valores de mq e Ω para diferentes φ e tensões de trabalho nas armaduras

$$mB = 648$$

m = coeficiente de equivalência

B = tensão de trabalho do betão

$$\varphi = \frac{\text{armadura compressão}}{\text{armadura tracção}}$$

$$h = \sqrt{\frac{M\Omega}{Bb}}$$

$$S_a = q \cdot h \cdot b$$

$$S'_a = \varphi \cdot S_a$$

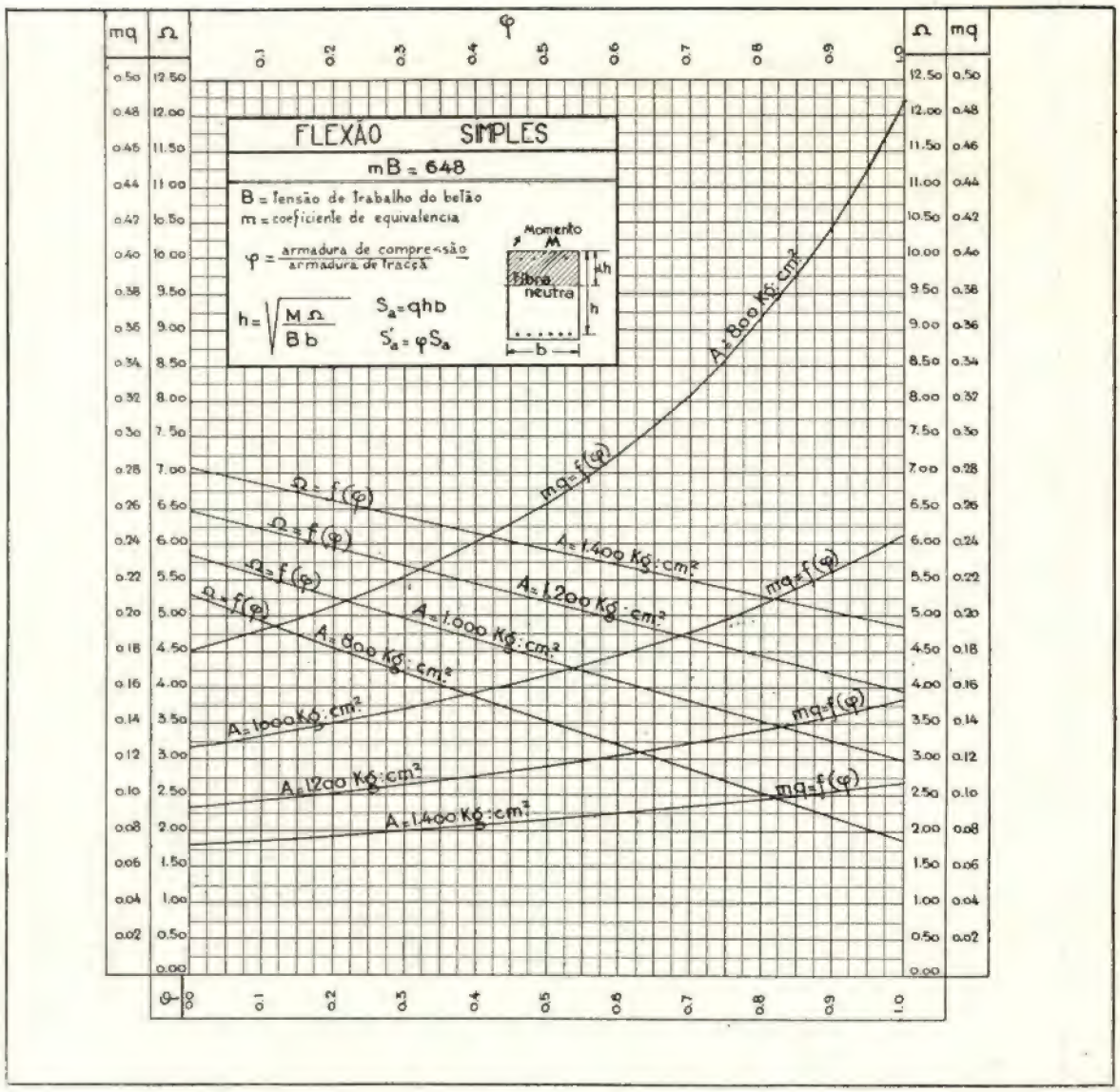


Fig. 5 — Ábaco para o cálculo de peças de betão armado à flexão simples .

Com os valores de q e Ω deduzimos as dimensões e secções de aço pelas fórmulas:

$$H = \sqrt{\frac{M\,\Omega}{b\,B}} \tag{32}$$

$$S_a = q\,h\,b \tag{33}$$

$$S'_a = \varphi\,q\,h\,b \tag{34}$$

O mais económico é utilizar a maior tensão admissível de trabalho do aço.

3.º — Flexão e tracção.

Seguindo a variação do esfôrço de compressão M, que tem vindo a decrescer até se anular no caso de flexão simples, chegamos a valores negativos, isto é, a esforços de tracção.

A peça estará submetida a um trabalho de flexão e tracção, e as fórmulas são análogas às do caso anterior, variando sòmente os sinais.

A distância do ponto de aplicação da fôrça ao eixo da peça é agora

$$e + \frac{h}{2} - \alpha\,h,$$

em vez de

$$e - \frac{h}{2} + \alpha\,h;$$

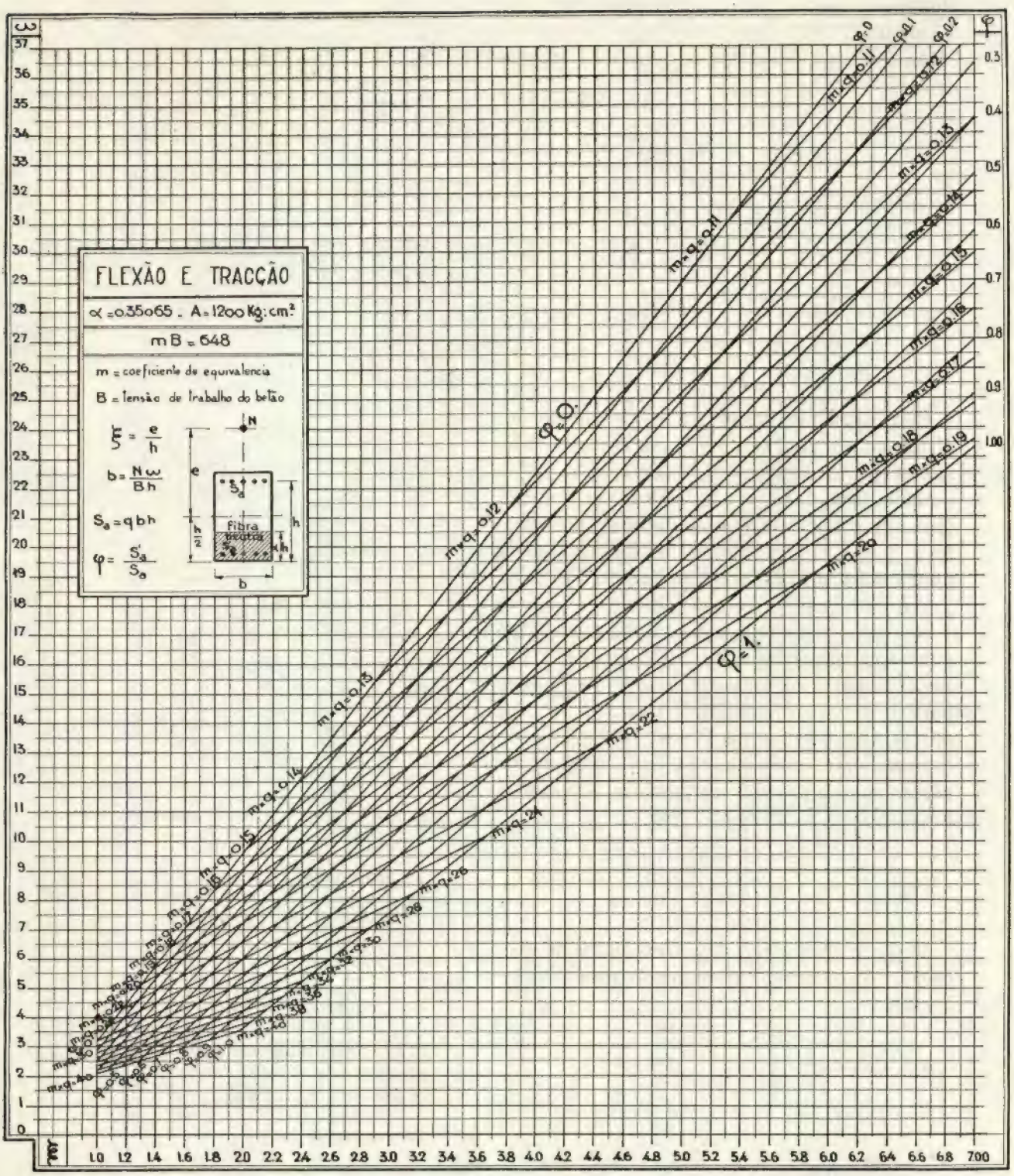


Fig. 6 — Ábaco para cálculo de secções rectangulares à flexão e tracção

o momento de inércia tem a mesma expressão do caso anterior, e o momento estático os sinais trocados.

As expressões (23) e (30) transformam-se respectivamente em:

$$(35) \quad \omega = \frac{\xi + \frac{1}{2} - \alpha - \frac{(1-\alpha)^2 + \varphi\,(\alpha - 0{,}1)^2}{1 - \alpha - \varphi\,(\alpha - 01)}}{\frac{\alpha^2}{3} + \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{(1-\alpha)^2 + \varphi\,(\alpha - 0{,}1)^2}{1 - \alpha - \varphi\,(\alpha - 0{,}1)}}$$

$$(36) \quad \omega = \frac{\alpha\,(\xi + 0{,}4)}{0{,}9\ m\,q\,(1-\alpha) + \frac{0{,}1\ \alpha^2}{2} - \frac{\alpha^3}{6}}$$

Procedendo de igual modo, desenhamos o ábaco representado na fig. 6. Tacteando, deduzimos que as zonas mais económicas correspondem aos casos de armadura assimétrica ($\varphi = 0$) para betões ricos; e de armadura simétrica ($\varphi = 1$) para betões pobres, existindo pouca diferença de preço utilizando $\varphi = 0$ ou $\varphi = 1$.

Não traçámos o ábaco correspondente a pequenas excentricidades de flexão e tracção, por ser esta forma de trabalho a mais inadequada para o betão armado, pois os casos que se apresentam são os de fortes excentricidades (por exemplo: efeitos produzidos pela retracção e diminuïção de temperatura nos dintéis de pórticos submetidos à flexão).

Exemplos de aplicação

Vejamos finalmente alguns exemplos de aplicação dos ábacos, variando os dados do problema.

1.º — *Dados:*

$N = 16.000$ kg $\qquad M = 800.000$ kg.cm.

Hipóteses:

$mB = 648$

$h = 60$ cm

(fixado por estimativa)

Incógnitas: b A S_a S'_a

Dêstes valores deduzimos:

$$e = \frac{M}{N} = 50 \qquad B = \frac{648}{15} = 43{,}2 \text{ kg/cm}^2$$

$$\xi = \frac{e}{h} = \frac{50}{60} = 0{,}833$$

Por ser a excentricidade $< 1{,}4$, utilizamos o ábaco da fig. 3.

Como se trata de um betão pobre, para $\xi = 0{,}833$ a secção mais económica corresponde a

$$\left.\begin{array}{r} \omega = 5{,}1 \\ mq = 0{,}092 \\ A = 760 \text{ kg/cm}^2 \end{array}\right\} \text{donde}$$

$$q = \frac{0{,}092}{15} = 0{,}0613$$

$$b = \frac{N \,.\, \omega}{h \,.\, B} = \frac{16.000 \times 5{,}1}{60 \times 43{,}2} = 31{,}4 \text{ cm}$$

$$S_a = S'_a = q \,.\, h \,.\, b = 0{,}0613 \times 60 \times 31{,}4 =$$

$$= 11{,}6 \text{ cm}^2.$$

2.º — *Dados:*

$$\left.\begin{array}{l} N = 30.000 \text{ kg} \\ e = 50 \text{ cm} \\ m = 15 \end{array}\right\} \text{e as dimensões da secção} \left\{\begin{array}{l} h = 80 \text{ cm} \\ b = 50 \text{ cm} \end{array}\right.$$

Incógnitas:

As secções de armaduras: S_a, S'_a.

As tensões de trabalho: A, B.

Dos dados deduzimos

$$\xi = \frac{e}{h} = \frac{50}{80} = 0{,}625$$

Neste caso, como nos são determinadas as dimensões por considerações de construção, a

secção mais económica será a que tenha menor quantidade de armaduras.

Obtemos assim, para $\xi = 0{,}625$:

$$\left.\begin{array}{r} A = 700 \text{ kg/cm}^2 \\ mq = 0{,}066 \\ \omega = 4{,}5 \end{array}\right\} \text{donde}$$

$$q = \frac{0{,}066}{15} = 0{,}0044$$

$$S_a = S'_a = q \,.\, b \,.\, h = 0{,}0044 \times 80 \times 50 = 17{,}6 \text{ cm}^2$$

$$B = \frac{N\omega}{b\,h} = \frac{30.000 \times 4{,}5}{80 \times 50} = 33{,}75 \text{ kg/cm}^2$$

Como $mB = 15 \times 33{,}75 \neq 648$, a verdadeira tensão de trabalho do aço será:

$$A' = 780 \times \frac{506}{648} = 609 \text{ kg/cm}^2$$

3.º — Verificar a secção seguinte:

Dados:

$$\left.\begin{array}{r} N = 14.000 \text{ kg} \\ e = 350 \text{ cm} \\ m = 10 \\ b = 60 \text{ cm} \\ h = 100 \text{ cm} \\ S_a = 45 \text{ cm}^2 \end{array}\right\}$$

Incógnitas: A B S'_a

Dos dados deduzimos:

$$\left.\begin{array}{r} \xi = \frac{350}{100} = 3{,}5 \\ q = \frac{S_a}{b\,h} = 0{,}0075 \\ mq = 0{,}075 \end{array}\right\}$$

Utilizando o ábaco da figura 4, obteremos

$$\left\{\begin{array}{l} \omega = 25 \\ A = 1200 \text{ kg/cm}^2 \\ \varphi = 0{,}1 \end{array}\right.$$

donde:

$$B = \frac{N\omega}{b\,h} = \frac{14.000 \times 25}{60 \times 100} = 58{,}3 \text{ kg/cm}^2$$

$$A' = 1.200 \frac{583}{648} = 1.080 \text{ kg/cm}^2$$

$$S'_a = 0{,}1 \times 45 = 4{,}5 \text{ cm}^2$$

4.º — *Dados:*

$$\left.\begin{array}{r} N \text{ (de tracção)} = 20.000 \text{ kg} \\ M = 1.200.000 \text{ kg.cm} \\ B = 50 \\ \varphi = \frac{1}{2} \end{array}\right\}$$

Hipóteses:

$mB = 648$

$h = 120$ cm

(fixado por estimativa)

Incógnitas: b A S_a $S'_a = \frac{1}{2} S_a$

Dos valores anteriores deduzimos

$$\xi = \frac{600}{120} = 5$$

$m = 12{,}96$ (betão de riqueza intermédia)

Tratando-se de um esfôrço de tracção, empregamos o ábaco da figura 5, que nos dá

$$\left.\begin{array}{r} mq = 0{,}147 \\ \omega = 22{,}2 \\ A = 1.200 \end{array}\right\}$$

donde

$$b = \frac{N\omega}{B\,h} = \frac{20.000 \times 22{,}2}{50 \times 120} = 74 \text{ cm}$$

$q = 0{,}0147$

$S_a = q\,b\,h = 0{,}0147 \times 74 \times 120 = 130{,}53$ cm²

$S'_a = \varphi\, S_a = 0{,}5 \times 130{,}53 = 65{,}26$ cm²

Incógnitas: h A S_a $S'_a = 0{,}3\, S_a$

Partimos duma tensão de trabalho do aço

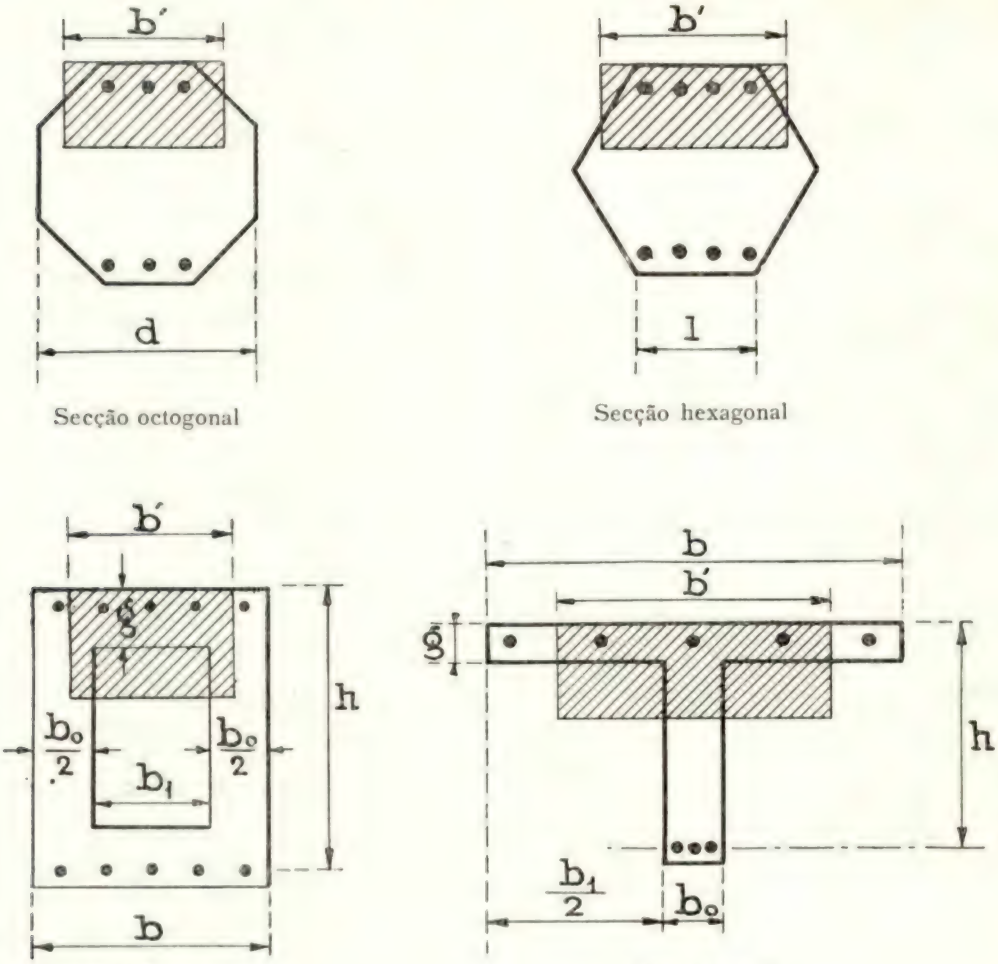


Fig. 7 — Cálculo de secção de betão armado à flexão

5.º — Caso de flexão simples

Dados:

M = 600.000 kg.m

m = 15

B = 45

Fixamos por estimativa:

b = 25 cm

$\varphi = 0{,}3$

A = 1.200 kg/cm². Nas tabelas (ou ábacos da figura 6) obtemos:

$$\left.\begin{aligned} mq &= 0{,}107 \\ \Omega &= 5{,}70 \end{aligned}\right\} \quad \text{donde:}$$

$$q = 0{,}0713$$

$$h = \sqrt{\frac{600.000 \times 5{,}7}{25 \times 4{,}5}} = 55 \text{ cm}$$

$$S_a = 0{,}00713 \times 55 \times 25 = 9{,}8 \text{ cm}^2$$

$$S'_a = 0{,}3 \times S_a = 2{,}94 \text{ cm}^2$$

A verdadeira tensão de trabalho do aço será:

$$A' = 1.200 \frac{675}{648} = 1.250 \text{ kg/cm}^2$$

Secções diferentes das rectangulares

No caso de secções diferentes das rectangulares, podem aplicar-se as mesmas fórmulas e ábacos, tomando em vez de *b* o valor *b'* obtido das conhecidas fórmulas: (1)

Secção hexagonal: $b' = (1 + 0{,}624\,\alpha)\,l$.

Secção octogonal: $b' = K\,d$.

Secções ôca e em T: $b' = b - b_1\left(1 - \frac{g}{h\,\alpha}\right)^2 =$

$$= b - (b - b_0)\left(1 - \frac{g}{h\,\alpha}\right) = \beta\,b.$$

Supondo $mB = 648$, formámos as tabelas seguintes para diferentes tensões de trabalho do aço. No caso de ser $mB \neq 648$, operaríamos com o valor de α obtido da formula (19).

(1) M. Torda — Le constructeur du ciment armé, 1928, N.os 106 a 109.
Beton-Kalender, 1935, pág. 281.
R. Roll — Beton-Kalender, 1939, pág. 322.
M. Torda — Travaux, Janeiro 1940.

Tensão de trabalho do aço	Valores de b'		Valores de α
	Secção hexagonal	Secção octogonal	
1400	1,197 . l	0,614 . d	0,3164
1200	1,219 . l	0,636 . d	0,3506
1000	1,245 . l	0,662 . d	0,3932
800	1,279 . l	0,694 . d	0,4475
600	1,324 . l	0,729 . d	0,5192
400	1,385 . l	0,767 . d	0,6183

Secções ôca e em T.

Tabela dos valores de $\beta = \frac{b'}{b}$

Valores de $\frac{g}{h}$ para as tensões de trabalho do aço = A:						Valores de β para diferentes relações $\frac{b}{b_0} = \frac{b}{b - b_1}$									$\frac{g}{h\,\alpha}$
A = 400	= 600	= 800	= 1000	= 1200	= 1400	$\frac{b}{b_0} = 2$	= 2'5	= 3	= 3'5	= 4	= 5	= 6	= 7	= 8	
0,556	0,467	0,403	0,354	0,316	0,285	0,995	0,994	0,993	0,993	0,992	0,692	0,992	0,991	0,991	0,9
0,495	0,415	0,358	0,314	0,280	0,253	0,980	0,976	0,973	0,971	0,970	0,968	0,967	0,966	0,965	0,8
0,433	0,363	0,313	0,275	0,245	0,221	0,955	0,946	0,940	0,936	0,932	0,928	0,925	0,923	0,921	0,7
0,371	0,312	0,268	0,236	0,210	0,190	0,920	0,904	0,893	0,886	0,880	0,872	0,867	0,864	0,860	0,6
0,309	0,260	0,224	0,197	0,175	0,158	0,875	0,850	0,833	0,821	0,812	0,800	0,792	0,786	0,781	0,5
0,247	0,208	0,179	0,157	0,140	0,127	0,820	0,784	0,760	0,743	0,730	0,712	0,700	0,692	0,685	0,4
0,216	0,182	0,157	0,138	0,123	0,111	0,768	0,746	0,718	0,698	0,683	0,661	0,647	0,637	0,630	0,35
0,185	0,156	0,134	0,118	0,105	0,095	0,755	0,706	0,673	0,650	0,632	0,608	0,591	0,580	0,571	0,3
0,155	0,130	0,112	0,098	0,088	0,079	0,718	0,662	0,624	0,598	0,578	0,549	0,531	0,518	0,507	0,25

O CÁLCULO DO BETÃO ARMADO APLICADO AOS EDIFÍCIOS

POR
J. DE CANG
Engenheiro civil
Professor da Universidade do Trabalho de Charleroi

(Continuação do n.º 119)

B) — Determinação dos diferentes elementos da Secção

ARMADURA SIMPLES

1) Largura da viga

A largura de uma viga de secção rectangular não se calcula. Esta largura é determinada em função do espaço de que se pode dispor. Assim num lintel ou numa viga sob uma divisória, a largura deverá geralmente corresponder à espessura das paredes que suportam.

Em qualquer caso, a largura deverá ser suficiente para permitir a colocação das armaduras e um perfeito apiloamento do betão. A distância lateral mínima das armaduras deverá, pelo menos, ser igual ao maior dos seguintes valores:

a) o diâmetro dos varões (1)

b) a dimensão máxima da brita ou calhau rolado, aumentada de 6 mm.

No caso, por exemplo, de se empregarem calhaus rolados com a dimensão máxima de 40 mm, e de os varões aplicados terem o diâmetro de 18 mm, a distância de eixo a eixo das armaduras deverá, pelo menos, ser igual a $40 + 6 + 18 = 64$ mm.

Se se admitir uma distância entre os varões extremos e as paredes da cofragem, igual a 20 mm (2), deveremos ter como largura mínima duma viga, fig. 15:

Com dois varões de 18 mm:
$46 + 2 \times 18 + 2 \times 20 = 122 \cong 150$ mm
Com três varões de 18 mm:
$2 \times 46 + 3 \times 18 + 2 \times 20 = 186$ mm $\cong 200$ mm
Com quatro varões de 18 mm:
$3 \times 46 + 4 \times 18 + 2 \times 20 = 250$ mm.

A largura de uma viga, segundo as prescrições belgas, não poderá em caso algum, ser inferior a 10 cm não se admitindo igualmente para a distância de eixo a eixo dos varões,

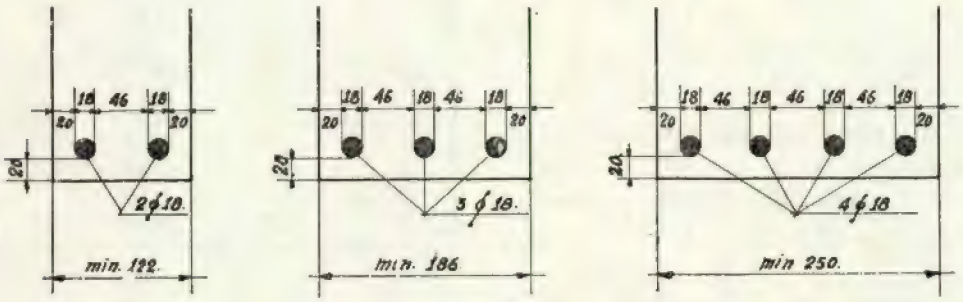


Fig. 15

(1) O R. B. A., no art. 36.º prescreve que o intervalo entre os varões das vigas em tôdas as direcções, deverá ser igual, pelo menos, ao seu diâmetro e nunca inferior a 2 cm. (N. T.)

(2) Segundo o art. 36.º do R. B. A. a camada de betão que deverá cobrir os estribos, por todos os lados, será no mínimo de 1,5 cm e em obras expostas 2 cm. (N. T.)

valores inferiores a 5 cm, nem superiores a 30 cm [1].

2) Cálculo da altura teórica h

A partir da expressão (13), que nos dá a fadiga das armaduras de tracção,

$$\left(t = m\,n\,\frac{h - Z}{Z}\right)$$

podemos obter uma nova equação da fibra neutra, em função das fadigas do betão e das armaduras:

$$\boxed{\frac{Z}{h} = \frac{m\,n}{m\,n + t}} \qquad (15)$$

A Tabela I dá os valores de $\frac{Z}{h}$, para os diferentes valores de m, n e t.

Se na expressão que dá o valor da fadiga de compressão do betão, se substituir Z pelo seu valor tirado da equação (15), obteremos:

$$n = \frac{2\,M}{a h^2 \frac{m\,n}{m\,n + t}\left(1 - \frac{m\,n}{3\,(m\,n + t)}\right)}$$

donde se tira:

$$h = \sqrt{\frac{2}{n\,\frac{m\,n}{m\,n + t}\left(1 - \frac{m\,n}{3\,(m\,n + t)}\right)}}\sqrt{\frac{M}{a}}$$

ou:

$$\boxed{h = A\sqrt{\frac{M}{a}}} \qquad (16)$$

O factor A representa um conjunto de termos que dependem de m, n e t.

Na Tabela I estão indicados os valores de A em função dos diferentes valores de m, n e t.

Para os valores de A supõe-se que o momento flector está expresso em quilogrâmetros, a largura em metros e a altura teórica h em milímetros.

[1] Ver nota [1] da página anterior (N. T.)

TABELA I

FADIGAS		m = 15		
n	t	$\frac{Z}{h}$	A	B
60	12	0,427	3,01	97,10
50	12	0,385	3,45	95,60
50	10	0,428	3,30	116,66
50	8	0,484	3,14	149,04
45	12	0,360	3,75	94,70
45	10	0,403	3,57	115,51
45	8	0,457	3,38	147,49
40	12	0,333	4,11	93,74
40	10	0,375	3,90	114,29
40	8	0,428	3,69	145,83
35	12	0,304	4,57	92,73
35	10	0,344	4,23	112,95
35	8	0,389	4,11	143,62
30	12	0,273	5,19	91,68
30	10	0,310	4,90	111,52
30	8	0,360	4,59	142,05
25	12	0,238	6,04	90,51
25	10	0,273	5,68	110,01
25	8	0,319	5,30	139,86
20	12	0,200	7,30	89,22
20	10	0,230	6,86	108,40
20	8	0,272	6,35	137,45
15	12	0,158	9,40	87,97
15	10	0,183	8,80	106,49
15	8	0,219	8,10	134,84

3) Cálculo da secção das armaduras de tracção

Partindo da expressão (14) que dá a fadiga das armaduras de tracção:

$$t = \frac{M}{\omega\left(h - \frac{Z}{3}\right)}$$

e substituindo Z pelo seu valor, tirado da equação (15), obtém-se:

$$\omega = \frac{1}{\left(t - \frac{Z}{3h}\right)} \frac{M}{h}$$

ou:

$$\boxed{\omega = B\frac{M}{h}} \qquad (17)$$

O factor B representa um conjunto de têrmos que dependem de m , n e t.

Indicámos na Tabela I os valores de B, supondo que o momento flector vem expresso em quilogrâmetros, a altura teórica h em milímetros e a secção ω em milímetros quadrados.

ARMADURA DUPLA

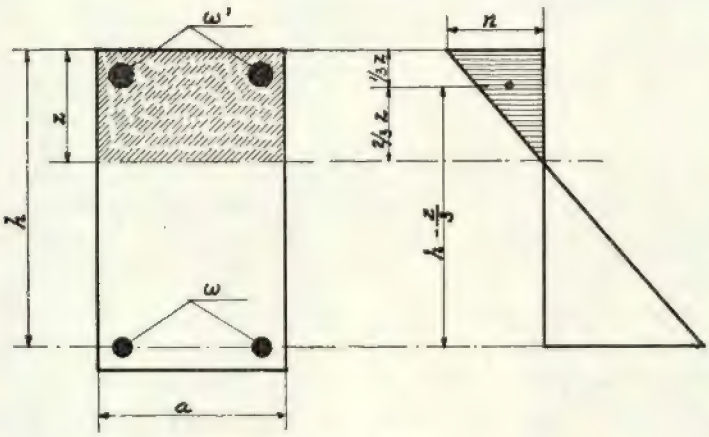


Fig. 16

O emprêgo de armadura de compressão não é necessário, senão quando a altura teórica h é imposta, e é inferior à que resultaria da expressão (16):

$$h = A\sqrt{\frac{M}{a}}$$

Para trazer a tensão de compressão de betão para o limite de fadiga admitido, torna-se necessário prever armaduras de compressão.

Na medida do possível, deve-se evitar o emprêgo de armaduras de compressão, pois em igualdade de resistência, a aplicação do aço à compressão é mais onerosa que a do betão.

Para obter uma expressão que nos dê a secção das armaduras de compressão, basta escrever que o momento das fôrças exteriores, isto é o momento flector M, é igual ao momento das fôrças interiores, estando o centro de momentos no centro das armaduras de tracção.

O momento das fôrças interiores será composto pelo momento M' das tensões de compressão do betão e pelo momento M'' das tensões de compressão das armaduras de compressão.

O momento das tensões das armaduras de tracção será nulo, visto que tomámos para centro de momentos o centro destas armaduras.

Podemos, portanto, escrever:

$$M = M' + M''$$

em que: M' = momento resistente do betão comprimido
= (superfície do betão comprimido) × (tensão média de compressão) × (braço de alavanca)

M'' = momento resistente das armaduras comprimidas

= (secção das armaduras comprimidas) × (tensão de compressão) × (braço de alavanca) ou seja:

$$M' = a Z \frac{n}{2}\left(h - \frac{Z}{3}\right)$$

$$M'' = \omega' \frac{m n (Z - c)}{Z}(h - c)$$

donde:

$$M = a Z \frac{n}{2}\left(h - \frac{Z}{3}\right) + \omega' \frac{m n (Z - c)}{Z}(h - c)$$

ou:

$$\omega' = \frac{M - a Z \frac{n}{2}\left(h - \frac{Z}{3}\right)}{m n \frac{(Z - c)}{Z}(h - c)}$$

$$= \boxed{\frac{M - M'}{m n \frac{(Z - c)}{Z}(h - c)}} \qquad (18)$$

Como já indicámos, a armadura de compressão ω' não é necessária, senão quando a altura teórica da viga é inferior à que resulta da expressão $h = A\sqrt{\frac{M}{a}}$, o que se dá no caso de o momento flector M ser superior ao momento resistente M'.

Para obter a secção das armaduras de tracção, basta tomar como centro de momentos o ponto de aplicação da resultante das tensões de compressão do betão e das armaduras comprimidas.

Admitiremos, para simplificar, que o ponto de aplicação desta resultante se acha a um têrço de altura do triângulo representativo das tensões normais de compressão, (fig. 16).

Poderemos, portanto, escrever que o momento das fôrças exteriores, isto é o momento flector, é igual ao momento das tensões de tracção das armaduras tendidas:

$$M = \omega t \left(h - \frac{Z}{3}\right)$$

donde:

$$\boxed{\omega = \frac{M}{t\left(h - \frac{Z}{3}\right)}} \qquad (19)$$

O valor de Z a introduzir nesta expressão é dado pela equação (15):

$$\frac{Z}{h} = \frac{m n}{m n + t}$$

A Tabela I dá os valores $\frac{Z}{h}$ para os diferentes valores de m, n e t.

N. B.—A expressão (19) que dá a secção das armaduras de tracção, é igualmente aplicável no caso de uma secção rectangular simplesmente armada.

C) — Comprimento dos varões que constituem as armaduras

Quando o vão duma viga é pequeno, e as cargas aplicadas são pouco importantes, calcula-se a altura teórica da viga e a secção das armaduras de tracção para o momento flector máximo, e conservam-se estes elementos em todo o comprimento da viga.

Quando porém, o vão é grande ou as cargas aplicadas são importantes, interessa limitar uma parte das armaduras nos pontos onde deixam de ser necessárias.

Vimos que a secção a dar às armaduras de tracção era dada pela expressão (17):

$$\omega = B \frac{M}{h}$$

Numa viga com a altura constante, os termos

B e h podem ser considerados como constantes. A secção ω das armaduras de tracção é portanto proporcional a M, o que quere dizer se o momento flector diminui de um têrço, por exemplo, a secção das armaduras pode igualmente ser reduzida de um têrço.

O comprimento a dar às armaduras determina-se fàcilmente por meio do diagrama dos momentos flectores. Vamos, a título de exemplo, determinar os comprimentos a dar às armaduras de tracção de uma viga simplesmente apoiada e uniformemente carregada, fig. 18.

Designemos por ω a secção das armaduras de tracção a meio da viga. Dividimos esta secção ω em três grupos de varões $\frac{\omega}{3}$.

Para determinar o comprimento a dar a cada grupo de varões, basta dividir a ordenada máxima da parábola dos momentos flectores, em três partes iguais, fig. 18, e traçar horizontais pelos pontos de divisão.

Estas horizontais cortarão a parábola em pontos, que em relação ao eixo da viga, determinarão as extremidades de cada grupo de varões $\frac{\omega}{3}$.

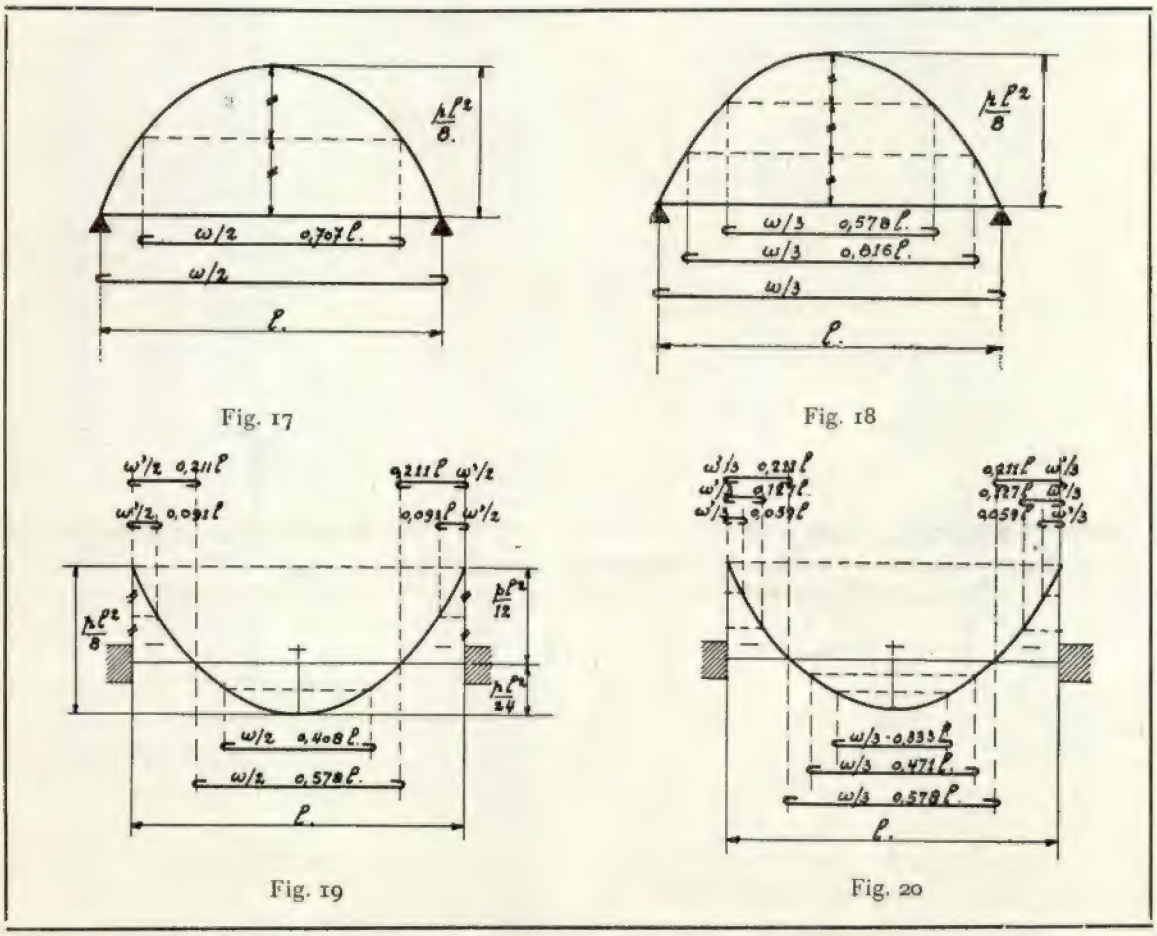
Consideremos agora, o caso de uma viga perfeitamente encastrada e uniformemente carregada, fig. 19.

Determina-se a altura da viga partindo do momento máximo negativo, ou seja $-\frac{p\,l^2}{12}$.

A secção das armaduras sôbre os apoios será achada a partir de $-\frac{p\,l^2}{12}$, e a secção das armaduras a meio a partir de $\frac{p\,l^2}{24}$.

TABELA II

COMPRIMENTO A DAR ÀS ARMADURAS



O comprimento a dar às armaduras determina-se como anteriormente, com o auxílio do diagrama dos momentos flectores, figs. 19 e 20.

Pode-se, igualmente, dar à viga uma altura teórica h correspondente ao momento flector positivo máximo, $\frac{p\,l^2}{24}$; será necessário, nesse caso, prever esquadros nos encastramentos e dar-lhe um comprimento igual, pelo menos, a 0,09 do vão da viga, e uma altura igual a um terço dêste comprimento [1]. É preciso notar, quando se toma para o comprimento dos esquadros 0,09 do vão, que estes têm início no ponto onde o momento flector não vale mais do que metade do momento de encastramento, fig. 21.

A secção das armaduras de encastramento

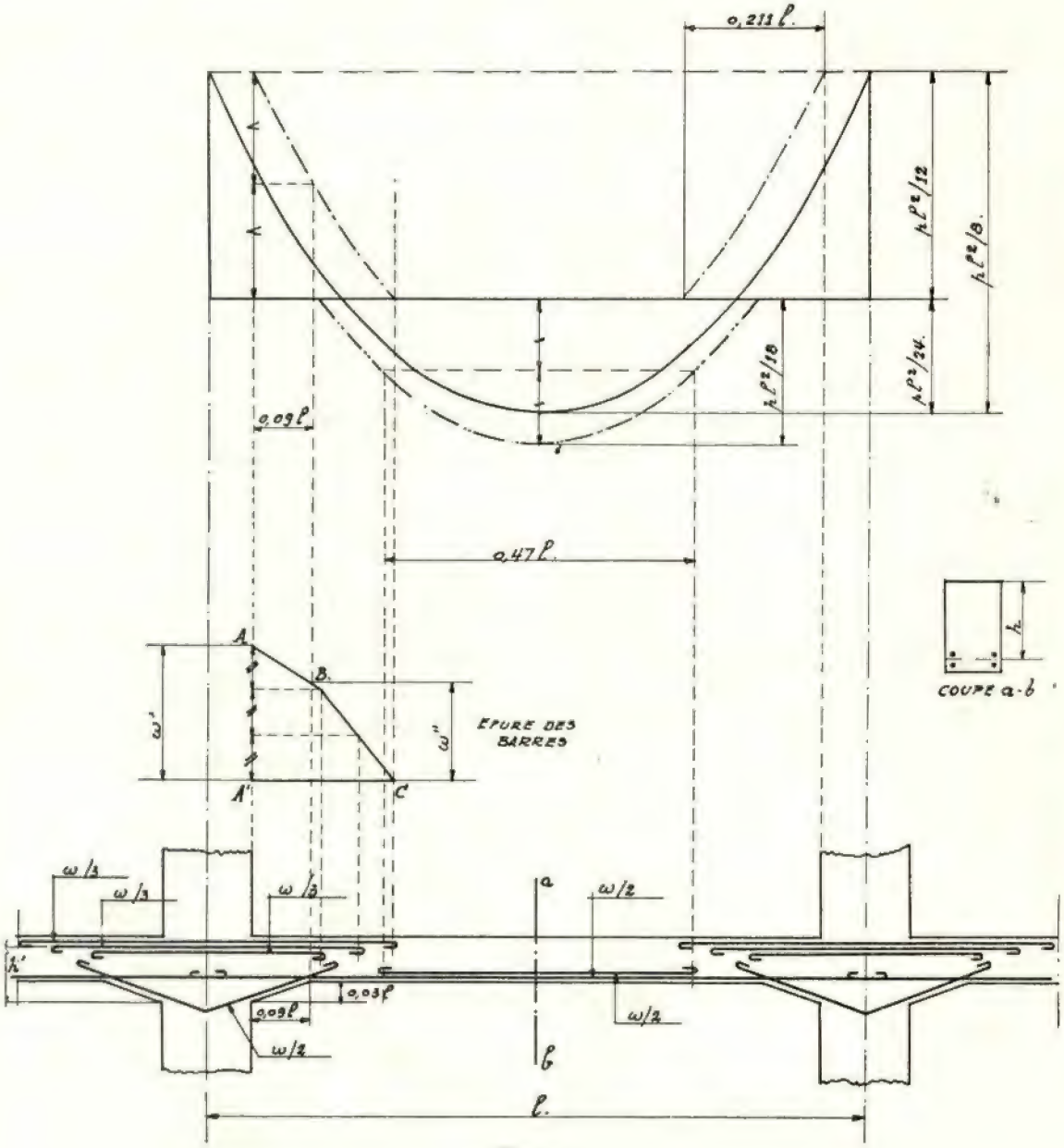


Fig. 21

[1] O art. 35.º do R. B. A. indica que a altura útil de uma viga com esquadros, para o cálculo da resistência ao momento flector no apoio, não se deverá considerar maior do que a correspondente à inclinação 1 : 3 dos esquadros de ligação. (N. T.)

será calculada com a altura teórica h', fig. 21, e a secção das armaduras de flexão com a altura teórica h.

Antes de passar à determinação do comprimento das armaduras, julgamos útil chamar a atenção para os seguintes pontos:

1.º — Os comprimentos a dar às armaduras, devem ser contados a partir da secção de encastramento, isto é, a partir da aresta do apoio e não a partir do seu eixo. O diagrama dos momentos flectores negativos sofrerá um deslocamento igual a metade da largura do apoio.

2.º — É prudente calcular a altura teórica no meio da viga, bem como a secção das armaduras de flexão para o momento flector $+\frac{p\,l^2}{18}$ em lugar de $+\frac{p\,l^2}{24}$, a-fim-de se tomar em consideração o facto de o encastramento perfeito ser raramente realizável.

Na determinação do comprimento das armaduras de flexão utilizaremos o diagrama desenhado a traço-ponto, em vez do diagrama a traço cheio.

Os comprimentos a dar às armaduras de encastramento, determinam-se pelo gráfico das armaduras. Para traçar este gráfico, basta determinar três pontos A, B e C.

A ordenada do ponto A será igual a $\omega' = B\frac{M}{h'}$, sendo $M = \frac{p\,l^2}{12}$.

A ordenada do ponto B será igual a $\omega'' = B\frac{M}{h}$, sendo $M = \frac{p\,l^2}{24}$.

A ordenada do ponto C é nula visto que o momento flector é nulo. Dividimos as armaduras de encastramento em três grupos, de secção $\frac{\omega'}{3}$.

Para determinar o comprimento a dar a cada grupo de armaduras, basta dividir a ordenada AA' em três partes iguais e traçar horizontais pelos pontos de divisão. Estas horizontais cortarão o gráfico das armaduras em pontos, que projectados sôbre o eixo da viga, determinarão os limites de cada grupo de armaduras.

Observações:

1 — Os comprimentos que se obtêm gràficamente para as armaduras, devem ser medidos de eixo a eixo dos ganchos. Para se obter o comprimento total de um varão, é necessário adicionar-lhe duas vezes o comprimento de um gancho, o que corresponde aproximadamente a vinte e duas vezes o diâmetro do varão.

2 — Devem-se prolongar até aos extremos da viga um terço ou metade das armaduras de flexão, sendo igualmente útil prolongarem-se dois varões da armadura de encastramento, a-fim-de se assegurar a fixação dos estribos.

PROBLEMA 10

Pede-se para calcular os elementos de uma lage quadrada, simplesmente apoiada nos seus quatro lados e suportando uma sobrecarga de 800 kg.m², Os apoios distam de 2m,00.

Os limites de fadiga do betão e do aço serão respectivamente 40 kg/cm² e 1.200 kg/cm².

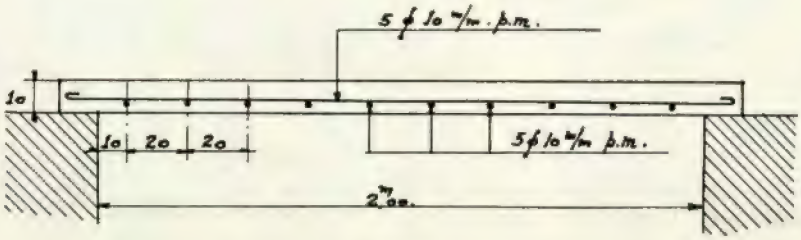


Fig. 22

Calcularemos esta lage pela teoria da dupla flexão, isto é, supondo que metade da carga produz uma flexão num sentido e que a outra metade produz uma flexão no outro sentido, o que só é verdadeiro para o caso da lage quadrada.

Arbitremos uma espessura de 10 cm, a que corresponde um pêso próprio:

$$2500 \times 0{,}10 = 250 \text{ kg/m}^2 \text{ (1)}.$$

A carga total por m² será:

$$800 + 250 = 1050 \text{ kg/m}^2$$

Teremos em cada um dos sentidos:

$$\frac{1050}{2} = 525 \text{ kg/m}^2$$

Consideremos o vão teórico igual ao vão livre (2 metros), aumentado da espessura da lage (2):

$$M = \frac{p\,l^2}{8} = \frac{525 \times 2{,}10^2}{8} = 290 \text{ kg/m}.$$

Altura teórica:

$$h = A\sqrt{\frac{M}{a}} = 4{,}11 \times \sqrt{\frac{290}{1}} = 70 \text{ mm}.$$

Secção das armaduras:

$$\omega = B\,\frac{M}{h} = 93{,}74\,\frac{290}{70} = 384 \text{ mm}^2$$

Empregaremos em cada sentido cinco varões de 10 mm por metro, totalizando a secção de 393 mm² (3).

Espessura da lage:

$$70 + \underset{\text{raio do varão}}{5} + \underset{\text{diâmetro do varão}}{10} + \underset{\text{recobrimento do betão}}{15} = 100 \text{ mm}$$

PROBLEMA 11

Pede-se para calcular a secção e o comprimento das armaduras de uma viga de secção rectangular, de 25 cm de largura e 40 cm de altura, solicitada a meio do vão por uma carga concentrada de 3580 kg.

A viga tem 4m,20 de vão e está simplesmente apoiada.

O limite de fadiga do betão será 50 kg/cm², e o do aço 1200/cm².

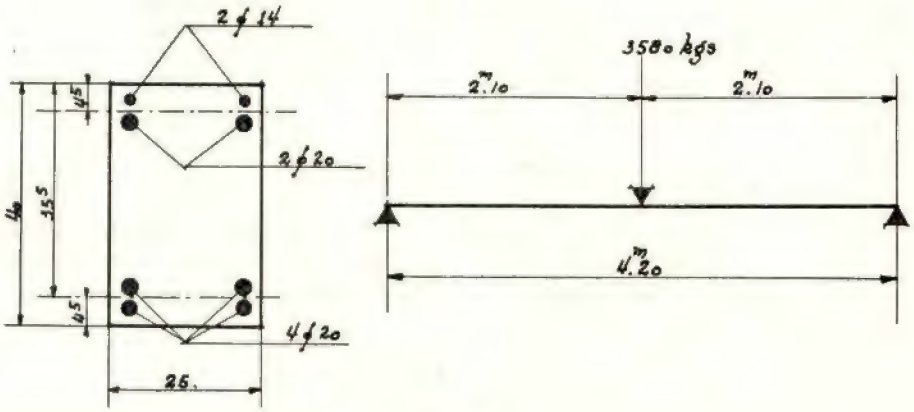


Fig. 23

(1) As prescrições belgas prevêm para o pêso próprio do betão armado 2500 kg/m³, como já foi dito. (N. T.)

(2) Art. 26.° do R. B. A. (N. T.)

(3) Segundo o art. 29.° do R. B. A., o intervalo entre os varões da armadura principal ou de resistência na região dos momentos máximos, não deverá ser superior a uma vez e meia a espessura da lage, com um máximo de 15 cm. (N. T.)

Pêso próprio da viga:

$$0{,}40 \times 0{,}25 \times 2500 = 250 \text{ kg/m}$$

Momento flector máximo a meio:

$$M = \frac{3580}{2} \times 2{,}10 + \frac{250 \times 4{,}20^2}{8} =$$

$$= 3.760 + 550 = 4.310 \text{ kg/m}$$

A altura teórica mínima, acima da qual não são necessárias armaduras de compressão, é dada pela expressão:

$$h = A\sqrt{\frac{M}{a}} = 3{,}45\sqrt{\frac{4.310}{0{,}25}} = 451{,}9 \text{ mm}$$

Como a alura dada é de 400 mm, torna-se necessário prever armaduras de compressão.

A secção das armaduras de compressão é dada pela expressão (18):

$$\omega' = \frac{M - aZ\frac{n}{2}\left(h - \frac{Z}{3}\right)}{mn\left(\frac{Z-c}{Z}\right)(h-c)}$$

na qual:

$M = 431000$ kg/cm
$a = 25$ cm
$h = 35{,}50$ cm²
$Z = 0{,}385\ h$ (Tabela I)
$= 0{,}385 \times 35{,}5 = 13{,}67$ cm
$n = 50$ kg/cm²
$m = 15$
$c = 4{,}5$ cm

donde:

$$\omega' = \frac{431.000 - 25 \times 13{,}67 \times \frac{50}{2}\left(35{,}50 - \frac{13{,}67}{3}\right)}{15 \times 50\left(\frac{13{,}67 - 4{,}50}{13{,}67}\right)(35{,}50 - 4{,}50)} =$$

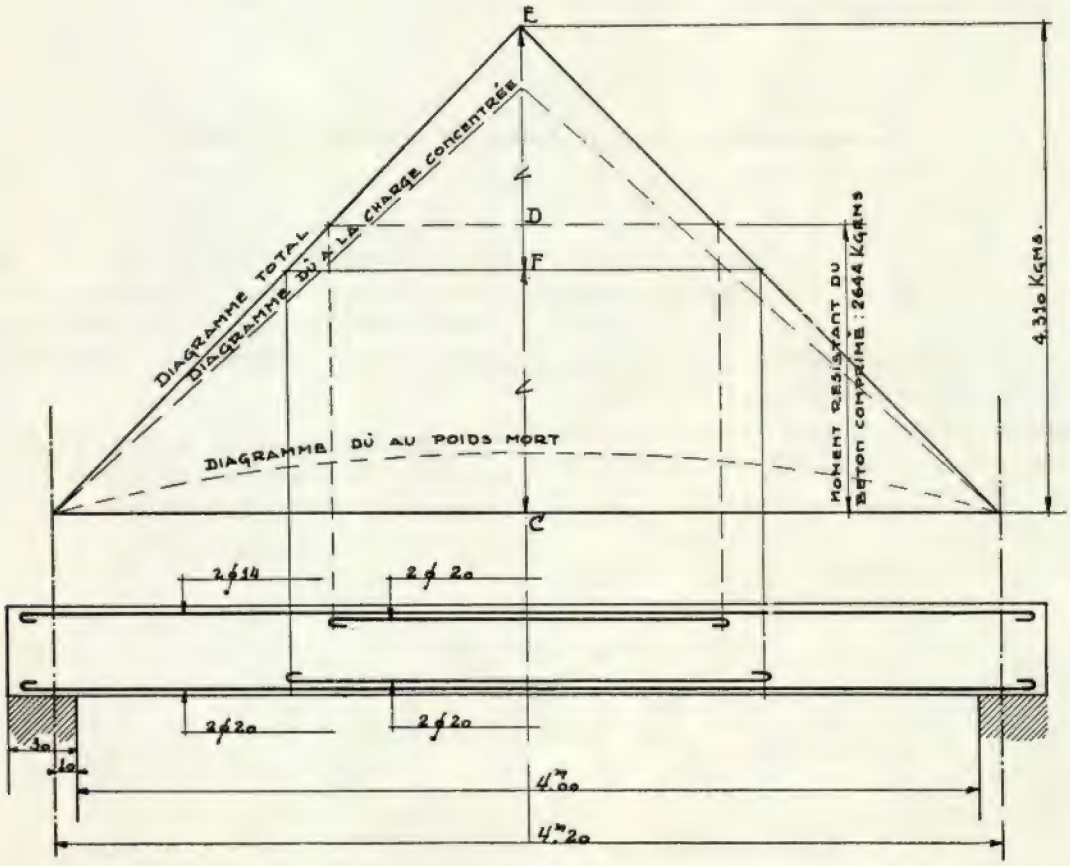


Fig. 24

$$= \frac{431.000 - 264.425}{17.387} = 9{,}58 \text{ cm}^2$$

Empregaremos $2\phi\ 20 + 2\phi\ 14$ mm, realizando uma secção total de $6{,}28 + 3{,}08 = 9{,}36 \text{ cm}^2$.

A secção das armaduras de tracção é dada pela expressão:

$$\omega = \frac{M}{t\left(h - \frac{Z}{3}\right)}$$

ou seja:

$$\omega = \frac{431.000}{1.200\left(35{,}50 - \frac{13{,}67}{3}\right)}$$

$$= 11{,}60 \text{ cm}^2$$

Empregaremos $4\phi\ 20$ mm, totalizando uma secção total de $12{,}58 \text{ cm}^2$.

Comprimento a dar aos varões comprimidos

Prolongaremos, de um extrêmo ao outro da viga, dois varões de $\phi\ 14$ mm, a-fim-de se poderem fixar os estribos, e limitaremos os dois varões de $\phi\ 20$ mm nos pontos onde deixam de ser necessários, isto é, nas secções em que o momento flector é igual ao momento resistente do betão comprimido.

Para determinar estes pontos, basta traçar no diagrama dos momentos flectores uma ordenada CD igual ao momento resistente do betão comprimido (2644 kg/m) [1] e tirar uma horizontal pelo ponto D. Esta horizontal cortará o diagrama dos momentos em dois pontos, que transportados sôbre o eixo da viga determinarão os limites dos varões.

Comprimento a dar aos varões da armadura de flexão

Prolongaremos, de um ao outro extremo da viga, dois varões de $\phi\ 20$ mm e limitaremos os dois outros nos pontos onde deixam de ser necessários. Para determinar estes pontos, basta dividir a ordenada CE que representa o momento flector máximo, em duas partes iguais e traçar uma horizontal pelo ponto de divisão F.

Esta horizontal corta o diagrama dos momentos flectores em dois pontos, que projectados no eixo da viga, determinam as secções onde os varões deixam de ser necessários.

---

[1] O momento resistente dos dois varões de 14 mm, prolongados de um extrêmo ao outro da viga foi desprezado a-fim-de simplificar. (N. A.)

5 — Cálculo de vigas em T submetidas à flexão simples

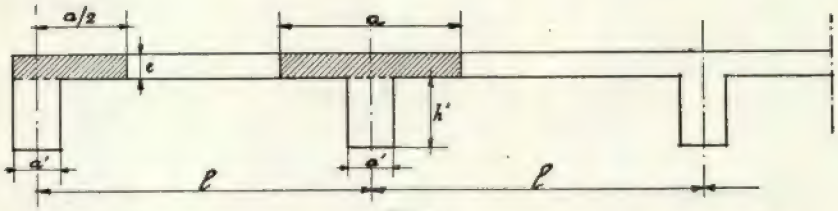


Fig. 25

Quando as lages de espessura uniforme têm grandes vãos, torna-se necessário reforçá-las com nervuras ou vigas.

Consideremos o pavimento representado na fig. 25. O cálculo da lage estabelece-se considerando uma faixa de 1 m de largura apoiada sôbre as nervuras, sem se tomar em consideração a aderência das faixas vizinhas.

Esta faixa será calculada como uma viga contínua de secção rectangular. Voltaremos a êste assunto quando nos ocupar-mos dos diferentes tipos de pavimentos com nervuras. (Capítulo II).

Para o cálculo das nervuras poderemos considerar como elemento resistente à compressão, uma largura de lage, a, fig. 25, igual ao menor dos seguintes valores, (Art.º 34.º R. B. A.):

a) Doze vezes a espessura da lage aumentada da largura da nervura, $(12\ e + a')$.

b) Metade do vão da nervura, $\left(\frac{L}{2}\right)$.

c) A distância entre os meios da lage (l) [1].

No caso de vigas ou nervuras de bordadura, fig. 25, não se pode ultrapassar o menor dos seguintes valores, (Art.º 34.º R. B. A.):

a) Quatro vezes e meia a espessura da lage aumentada da largura da nervura, $(4,5\ e + a')$.

b) A quarta parte do vão da nervura, $\left(\frac{L}{4}\right)$.

c) Metade da distância entre as nervuras aumentadas da largura da nervura, $\left(\frac{l}{2} + a'\right)$. [2]

O Artigo 34.º do R. B. A. prescreve que para a lage poder ser considerada como elemento resistente à compressão, a sua espessura não deve ser inferior a 7 cm.

No mesmo Artigo, indicam-se igualmente os valores a adoptar para os cálculos das incógnitas hiperestáticas e das deformações ou sejam:

---

[1] Os valores indicados no art.º 34.º do R. B. A. prevêem a existência de esquadros de ligação entre a lage e as nervuras, entrando portanto em linha de conta com o seu comprimento. (N. T.)

[2] Os valores prescritos na Edição Original, são os aplicados na Bélgica ou sejam: 12 e ; $\frac{1}{3}$ L ou a distância entre nervuras, para as nervuras com lage de ambos os lados, e metade dêstes valores, adicionados à semi-largura da nervura, para as de bordadura. (N. T.)

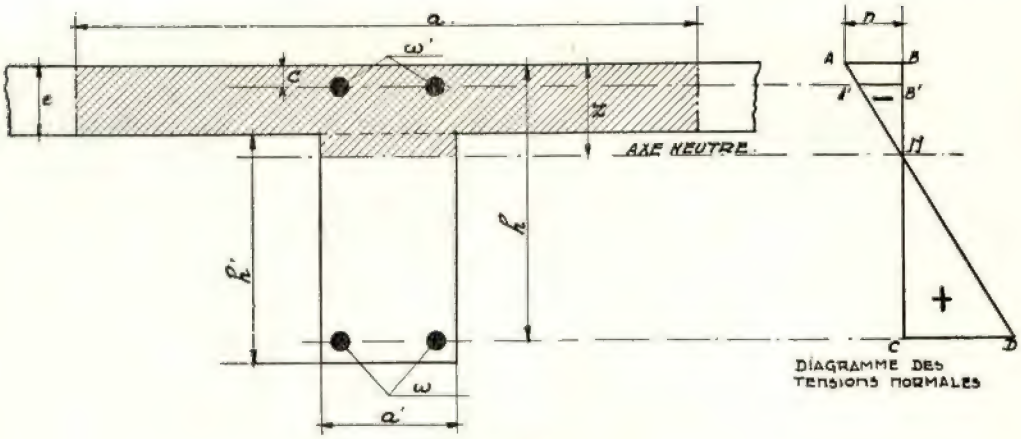


Fig. 26

Nervuras com lage de ambos os lados:

Seis vezes a espessura da lage, aumentada da largura da nervura, não excedendo a distância entre os meios da lage, $6e + a' = l$).

Nervuras de bordadura:

Duas vezes e um quarto a espessura da lage, aumentada da largura da nervura, não excedendo esta largura, adicionada a metade da distância entre nervuras, $\left(2{,}25\,e + a' = a' + \frac{l}{2}\right)$.

Notações:

Designaremos por:

ω — a secção das armaduras de tracção.
ω' — a secção das armaduras comprimidas.
h — a altura teórica da secção em T, isto é, a distância entre o eixo das armaduras de tracção e a aresta comprimida mais afastada.
Z — a distância entre a fibra neutra e a mesma aresta.
e — a espessura da lage.
h' — a altura da nervura.
a' — a largura da nervura.
c — a distância entre o eixo das armaduras comprimidas e a aresta mais comprimida.
n — tensão máxima do betão à compressão.
n' — tensão das armaduras comprimidas.
t — tensão das armaduras de tracção.
I — o momento de inércia da secção total fictícia, em relação à fibra neutra.

Na determinação das fadigas e da posição da fibra neutra não se toma em consideração a resistência do betão à tracção.

Equação da fibra neutra

Como a fibra neutra passa pelo centro de gravidade da secção total fictícia, o momento estático desta secção em relação a ela, deve ser nulo.

Êste momento estático obtém-se, como se sabe, adicionando ao momento estático da secção de betão comprimida, o momento estático da secção das armaduras comprimidas, e subtraindo ao total o momento estático das armaduras tendidas, fig. 26:

$$a\,e\left(Z - \frac{e}{2}\right) + \frac{(Z-e)^2}{2}\,a' + m\,\omega'(Z - c) - m\,\omega\,(h - Z) = 0$$

$$Z\,a\,e - \frac{a\,e^2}{2} + \frac{Z^2 a'}{2} + Z\,e\,a' + m\,\omega' Z - m\,\omega' c - m\,\omega\,h + m\,\omega\,Z = 0$$

$$Z^2\frac{a'}{2} + Z\,(a\,e - a'\,e + m\,\omega' + m\,\omega) - \left(\frac{a\,e^2}{2} - \frac{a'\,e^2}{2} + m\,\omega' c + m\,\omega\,h\right) = 0$$

donde:

$$Z = -\frac{(a\,e - a'\,e + m\,\omega' + m\,\omega)}{a'} + \sqrt{\frac{(ae - a'e + m\omega' + m\omega)^2 + 2a'\left(\frac{ae^2}{2} - \frac{a'e^2}{2} + m\omega' c + m\omega h\right)}{a'}} \qquad (20)$$

Temos, portanto, uma equação do 2.º grau cuja raiz é a expressão acima indicada.

A secção do betão comprimida, entre a fibra neutra e a face inferior da lage, pode ser desprezada, desde que a altura h' da nervura não seja superior a três vezes a espessura da lage, aproximadamente.

A equação da fibra neutra simplifica-se e poderemos escrever:

$$Z(a\,e + m\,\omega' + m\,\omega) - \left(\frac{a\,e^2}{2} + m\,\omega' c + m\,\omega h\right) = 0$$

donde:

$$\boxed{Z = \frac{\frac{a\,e^2}{2} + m\,\omega' c + m\,\omega h}{a\,e + m\,\omega' + m\,\omega}} \qquad (21)$$

A — Verificação das Fadigas

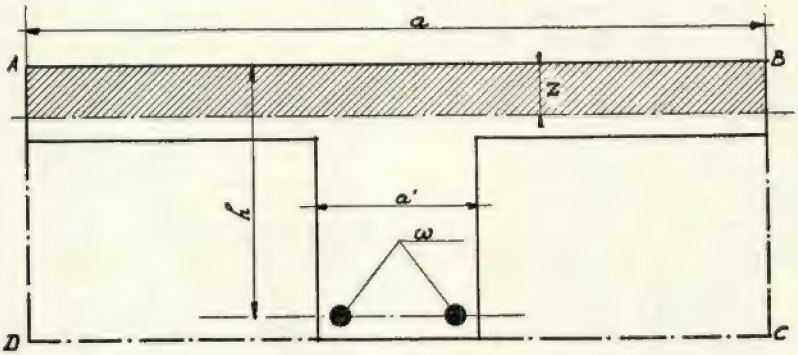


Fig. 27

Dois casos se podem dar:

Primeiro caso: $Z < e$, fig. 27.

A fibra neutra passa acima da face inferior da laje.

A determinação das tensões faz-se considerando a nervura como uma secção rectangular (ABCD), de largura a, e de altura teórica h. A secção de betão submetida a esforços de tracção não tem nenhuma influência nos cálculos, visto que se não considera a resistência do betão à tracção.

O valor exacto de Z, a aplicar na expressão que nos dá a fadiga de compressão do betão, obtém-se a partir da equação da fibra neutra, estabelecida para as vigas de secção rectangular.

Segundo caso: $Z > e$, fig. 26.

A fibra neutra passa abaixo da face inferior da lage.

A determiuação das fadigas faz-se pelas fórmulas seguintes:

Fadiga do Betão

A tensão de compressão máxima do betão é dada pela expressão da flexão simples:

$$\boxed{n = \frac{MZ}{I} = \frac{M\,Z}{\left[\frac{ae^3}{12} + ae\left(Z - \frac{e}{2}\right)^2 + \frac{a'(Z-e)^3}{3} + m\omega'(Z-c)^2 + m\omega(h-Z)^2\right]}} \qquad (22)$$

No caso da nervura não ter armadura de compressão, ($\omega' = 0$), e quando a sua altura não ultrapassar três vezes a espessura da laje isto é, quando se pode desprezar a parte comprimida da nervura, a expressão acima indicada passará a ser:

$$n = \frac{M Z}{\frac{a e^3}{12} + a e \left(Z - \frac{e}{2}\right)^2 + m \omega (h - Z)^2}$$

Podemos obter ainda uma expressão mais simples, escrevendo que o momento das fôrças exteriores, isto é o momento flector, é igual ao momento das fôrças interiores, tomando para centro de momentos o centro das armaduras de tracção. O momento das fôrças interiores obtém-se, multiplicando a resultante das tensões de compressão do betão, $\left(a e \frac{n}{2}\right)$, pela sua distância ao eixo das armaduras de tracção.

Admitiremos, para simplificar, que o ponto de aplicação da resultante das tensões de compressão do betão se encontra situado no eixo da lage.

Podemos, portanto, escrever:

$$M = a e \frac{n}{2} \left(h - \frac{e}{2}\right)$$

donde:

$$\boxed{n = \frac{2 M}{a e \left(h - \frac{e}{2}\right)}} \qquad (23)$$

Fediga das Armaduras Comprimidas

A tensão de compressão do betão, na secção que passa pelo eixo das armaduras de compressão, é representada pelo comprimento A′B′, no diagrama das tensões normais, fig. 26.

Como os triângulos ABN e A′B′N são semelhantes, podemos escrever:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{NB'}{NB}$$

ou:

$$\frac{A'B'}{n} = \frac{Z - c}{Z}$$

donde:

$$A'B' = n \frac{Z - c}{Z}$$

Para se obter a tensão de compressão das armaduras comprimidas, basta multiplicar êste valor A′B′, pelo coeficiente de equivalência:

$$\boxed{n' = m n \frac{Z - c}{Z}} \qquad (24)$$

Fadiga das Armaduras Tendidas

Dos triângulos semelhantes A B N e D C N podemos tirar a relação:

$$\frac{CD}{AB} = \frac{CN}{BN}$$

ou:

$$\frac{CD}{n} = \frac{h - Z}{Z}$$

donde:

$$CD = n \frac{h - Z}{Z}$$

e portanto:

$$\boxed{t = m n \frac{h - Z}{Z}} \qquad (25)$$

Podemos obter um valor aproximado para a fadiga das armaduras tendidas, tendo em atenção que o momento das fôrças exteriores, isto é o momento flector, é igual ao momento das tensões de tracção das armaduras tendidas, tomando para centro de momentos o ponto de aplicação da resultante das tensões de compressão do betão e das armaduras comprimidas.

Admitindo, para simplificar, que o ponto de aplicação desta resultante se encontra no eixo da lage, poderemos escrever:

$$M = \omega t \left(h - \frac{e}{2}\right)$$

donde:

$$\boxed{t = \frac{M}{\omega \left(h - \frac{e}{2}\right)}} \qquad (26)$$

B — Determinação das dimensões a' e h' da Nervura e da secção das armaduras tendidas

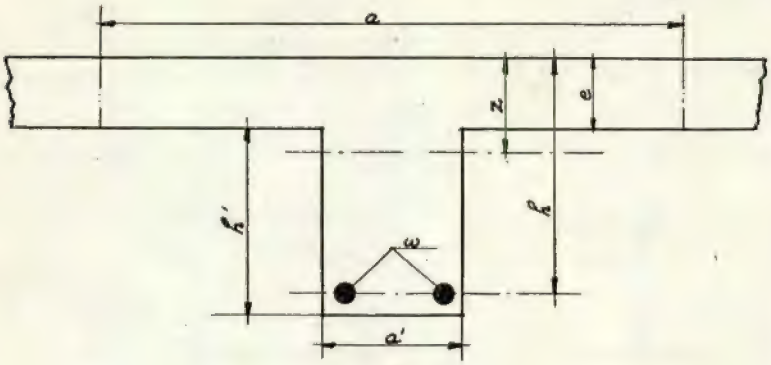


Fig. 28

1) Largura a' da Nervura

A largura a' da nervura deverá ser suficiente para permitir uma fácil colocação das armaduras de tracção e um perfeito apiloamento do betão. Esta largura dependerá directamente do número e do diâmetro dos varões a empregar, como já vimos no estudo das vigas de secção rectangular (1).

2) Secção das Armaduras Tendidas

Partindo da expressão (26), que dá a fadiga das armaduras tendidas, podemos obter o valor da secção das armaduras:

$$\boxed{\omega = \frac{M}{t\left(h - \frac{e}{2}\right)}} \qquad (27)$$

3) Altura h' da Nervura

Poderíamos estabelecer para h' uma fórmula tal que, o betão trabalhasse no limite de fadiga. Chegaríamos assim a uma altura pequena e portanto a armaduras de secção elevada, uma vez que a secção das armaduras é inversamente proporcional à altura da nervura. A solução não seria económica.

Aumentando um pouco a altura da nervura, diminuiremos bastante a secção das armaduras, o que aumenta o volume de betão a empregar, mas diminui o preço do custo da nervura.

Vamos determinar qual é a altura h' mais económica.

Designemos por A, o preço por metro linear de nervura, excepção feita das cofragens, cujo preço não varia muito com a altura da nervura:

A = (secção das armaduras tendidas) × (comprimento) × (densidade do aço) × (preço, por quilo) + (secção da nervura) × (comprimento) × (preço do betão por metro cúbico).

Tomando o quilo e o centímetro, como unidades, podemos escrever:

$$A = \omega \times 100 \times 0{,}0078 \times 2{,}50 \times 1{,}30 + a'\,h' \times 100 \times 0{,}000180$$

O factor 1,30 corresponde à percentagem suplementar dos estribos, ligações, etc.

Substituindo ω por: $\dfrac{M}{t\left(h - \frac{e}{2}\right)}$ e como o segundo termo do denominador não difere muito do h', poderemos escrever:

$$\omega = \frac{M}{th'}$$

(1) A largura das vigas ou nervuras é evidentemente limitada, pelo art. 23.º do R. B. A. (Tensões tangenciais) que deverão ser verificadas pela expressão $\frac{T}{a \times b}$ não podendo exceder 14 kg/cm² (betão normal). (N. T.)

donde:

$$A = \frac{M}{th'} \times 100 \times 0{,}0078 \times 2{,}50 \times 1{,}30 + ah' \times$$
$$\times 100 \times 0{,}000180$$

ou seja:

$$A = \frac{M}{h'} \frac{100 \times 0{,}0078 \times 2{,}50 \times 1{,}30}{1200} + a'h' \times$$
$$\times 100 \times 0{,}000180$$

O preço, por metro linear da nervura, será mínimo quando a derivada de A em ordem a h', seja nula:

$$A = 0{,}00211 \frac{M}{h'} + 0{,}0180\ a'h'$$

$$\frac{dA}{dh'} = -0{,}00211 \frac{M}{h'^2} + 0{,}0180\ a'$$

donde:

$$h'^2 = \frac{0{,}00211}{0{,}0180} \frac{M}{a'} = 0{,}116 \frac{M}{a'}$$

ou:

$$\boxed{h' = 0{,}34 \sqrt{\frac{M}{a'}}} \quad (28)$$ [1]

A altura h' virá em centímetros, para o momento flector expresso em quilogrâmetros e a largura a' reduzida a metros.

Se fixarmos antecipadamente a relação $K = \frac{a'}{h'}$, a expressão anterior pode escrever-se:

$$h'^2 = 0{,}116 \frac{M}{K\,h'}$$

donde:

$$h'^3 = \frac{0{,}116}{K} M$$

ou:

$$\boxed{h' = C' \sqrt[3]{M}} \quad (29)$$

O coeficiente C' toma os valores seguintes:

para: $a' = \frac{3}{2}h'$ $\frac{4}{3}h'$ h' $\frac{3}{4}h'$ $\frac{3}{5}h'$ $\frac{1}{2}h'$ $\frac{1}{3}h'$

teremos:

C' = 1,99 2,06 2,27 2,49 2,68 2,86 3,27

Os valores de C' foram calculados de maneira a obter-se h' em centímetros, quando o momento flector vem expresso em quilogrâmetros.

Restam-nos fazer duas verificações:

a) *Verificação da tensão de compressão do betão:*

A expressão (28) que dá a altura h', mais económica, da nervura, foi obtida calculando o seu preço mínimo por metro linear; mas não entra em conta com o limite de fadiga do betão. Torna-se necessário verificar se êste limite não é ultrapassado e se fôr indispensável, aumentar a altura h' ou prever armaduras de compressão.

A tensão de compressão do betão é dada pela expressão (22):

$$n = \frac{MZ}{I} = \frac{MZ}{\frac{a\,e^3}{12} + ae\left(Z - \frac{e}{2}\right)^2 + \frac{a'(Z-e)^3}{3} + m\omega(h-Z)^3}$$

No caso da altura h' da nervura não ultrapassar, aproximadamente, três vezes a espessura da lage, poderemos aplicar a expressão simplificada (23):

$$n = \frac{2M}{a\,e\left(h - \frac{e}{2}\right)}$$

Observação:

Se aplicássemos esta expressão a nervuras cuja altura h' fôsse superior a três vezes a espessura da lage, obteríamos para a tensão de compressão do betão, um valor superior ao que resultaria da fórmula exacta:

$$n = \frac{M_Z}{I}$$

na qual se toma em consideração a parte comprimida da nervura.

Como a aplicação da fórmula exacta é bas-

[1] Os preços estabelecidos foram os preços médios de 2$50 para o ferro e 180$00 para o betão. (N. T.)

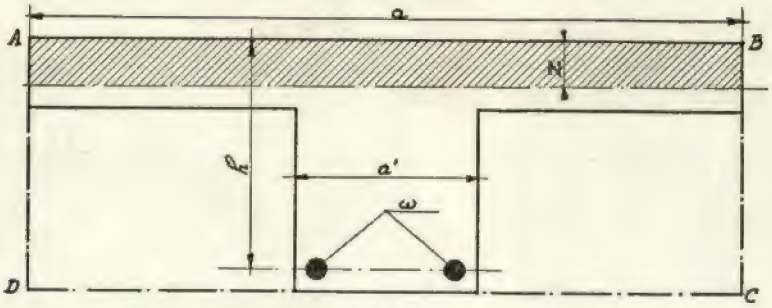


Fig. 29

tante trabalhosa, começaremos por empregar a fórmula aproximada e não se aplicará a fórmula exacta, senão no caso em que aquela nos conduza a uma tensão superior ao limite de fadiga.

b) *Verificação da posição da fibra neutra.*

As expressões que nos dão a secção das armaduras tendidas, a altura h' da nervura e a tensão de compressão do betão não são válidas senão para o caso da fibra neutra passar abaixo da face inferior da lage.

A posição da fibra neutra é dada pela expressão (20). Sempre que a altura da nervura não ultrapasse três vezes a espessura da lage, podemos empregar a expressão simplificada (21).

Se a fibra neutra passasse acima da face inferior da lage, tornava-se necessário calcular de novo todos os elementos da nervura, como se tratasse duma secção rectangular, fig. 29, aplicando as fórmulas (16) e (17):

$$h = A\sqrt{\frac{M}{a}} \quad \text{e} \quad \omega = B\sqrt{\frac{M}{a}}$$

Ao coeficiente A deve-se atribuir um valor tal que, a altura h' da nervura não seja muito diferente da calculada prèviamente, com o auxílio da expressão $h' = 0{,}34\sqrt{\frac{M}{a}}$.

ARMADURA DUPLA

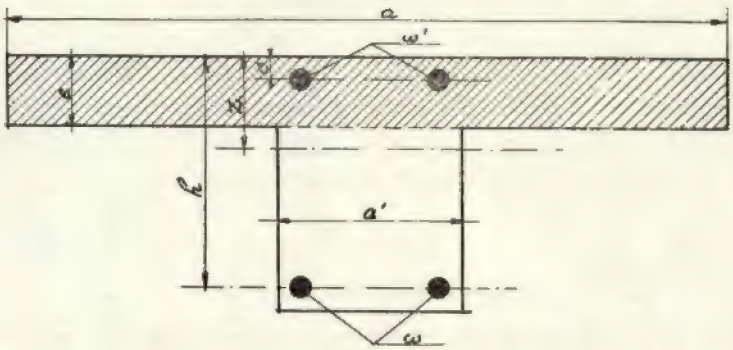


Fig. 30

Quando a tensão de compressão do betão ultrapassa o limite de fadiga, torna-se necessário aumentar a altura da nervura, ou prever armaduras de compressão. Deve-se evitar, na medida do possível, o emprêgo de armaduras de compressão, porque em igualdade de resistência, a aplicação das armaduras é mais dispendiosa que a do betão.

Para obter uma expressão que nos dê a secção das armaduras de compressão, basta escrever que o momento das fôrças exteriores, isto é o momento flector, é igual ao momento das fôrças interiores, tomando para centro de momentos o centro das armaduras tendidas.

O momento das fôrças interiores é composto pelo momento M' das tensões de compressão do betão e pelo momento M'' das tensões de compressão das armaduras comprimidas.

O momento das tensões de tracção das armaduras tendidas será nulo, visto que, se tomou para centro de momentos o centro destas armaduras.

Podemos, portanto, escrever:

$$M = M' + M''$$

Em que:

M' = Momento resistente do betão comprimido =

= (secção do betão comprimida) x (tensão média de compressão) x (braço de alavanca).

$$= a\,e\,\frac{n}{2}\left(h - \frac{e}{2}\right)$$

M'' = Momento resistente das armaduras comprimidas =

= (secção das armaduras comprimidas) x (tensão de compressão) x (braço de alavanca.

$$= \omega'\,m\,n\,\frac{Z - c}{Z}\,(h - c)$$

donde:

$$M = a\,e\,\frac{n}{2}\left(h - \frac{e}{2}\right) + \omega'\,m\,n\,\frac{(Z - c)}{Z}\,(h - c)$$

ou seja:

$$\boxed{\omega' = \frac{M - a\,e\,\frac{n}{2}\left(h - \frac{e}{2}\right)}{\frac{m\,n\,(Z - c)}{Z}\,(h - c)}} \qquad (30)$$

Para obter uma expressão que nos dê a secção das armaduras de tracção, bastará tomar para centro de momentos, o ponto de aplicação da resultante das tensões de compressão do betão e das armaduras comprimidas. Admitiremos, para simplificar, que êste ponto está sôbre o eixo da lage.

Poderemos, então, escrever:

$$M = \omega\,t\left(h - \frac{e}{2}\right)$$

donde:

$$\boxed{\omega = \frac{M}{t\left(h - \frac{e}{2}\right)}}$$

PROBLEMA 12

Pede-se para calcular as nervuras dum pavimento de betão armado que suporta uma sobrecarga de 800 kg/m². Supõem-se as nervuras simplesmente apoiadas, tendo $3^m,80$ de vão e $1^m,60$ de afastamento. A lage tem 8 cm de espessura, sendo os limites de fadiga para o betão e para o aço, respectivamente 50 kg/cm² e 700 kg/cm².

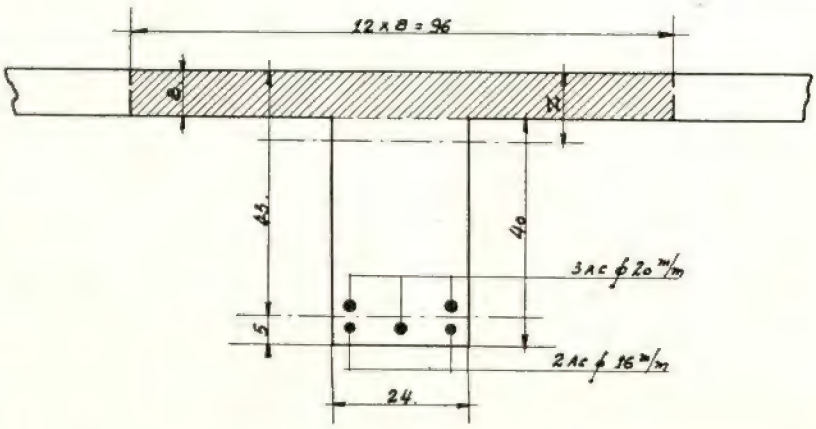


Fig. 31

Carga total por metro linear de nervura:

Pêso próprio: $0{,}40 \times 0{,}24 \times 2500$.....	240
Lage: $1{,}60 \times 0{,}08 \times 2500$	320
Sobrecarga: $1{,}60 \times 800$	1280
Total.....	1840

Momento flector máximo:

$$M = \frac{pl^2}{8} = \frac{1840 \times 3{,}80^2}{8} = 3312 \text{ kgm}$$

Altura da Nervura:

$$h' = C' \sqrt{M}$$

Adoptando $\frac{a'}{h'} = \frac{3}{5}$, o coeficiente C' será:

$$C' = 2{,}68$$

donde:

$$h' = 2{,}68 \times 3312 = 39{,}9 \cong 40 \text{ cm}$$

Largura da nervura:

$$a' = \frac{3}{5} 40 = 24 \text{ cm}$$

Secção das armaduras de tracção:

$$\omega = \frac{M}{t\left(h - \frac{e}{2}\right)} = \frac{351200}{700\left(43 - \frac{8}{2}\right)} = 12{,}13 \text{ cm}^2$$

Empregaremos 2 varões de ø 16 e 3 varões de ø 20, com uma secção total de 13,44 cm².

Verificação da tensão de compressão do betão: (1)

$$n = \frac{2M}{a\,e\left(h - \frac{e}{2}\right)} = \frac{2 \times 331200}{96 \times 8\left(43 - \frac{8}{2}\right)} = 22{,}10 \text{ kg/cm}^2$$

Verificação da posição da fibra neutra:

$$Z = \frac{\frac{a\,e^2}{2} + m\,\omega\,h}{a\,e + m\,\omega} = \frac{\frac{96 \times 8^2}{2} + 15 \times 13{,}44 \times 43}{96 \times 8 + 15 \times 13{,}44} = 14{,}90 > 8 \text{ cm}$$

6 — Resistência ao esfôrço transverso e ao escorregamento longitudinal

Consideremos o elemento de viga, representado na fig. 32, submetido à flexão simples.

O prisma de betão *a b c d* compreendido entre as duas secções transversais S_1 S_2 e o plano horizontal G_1 G_2 é solicitado por duas fôrças longitudinais N_1 e N_2, que são proporcionais à parte tracejada do diagrama das tensões normais.

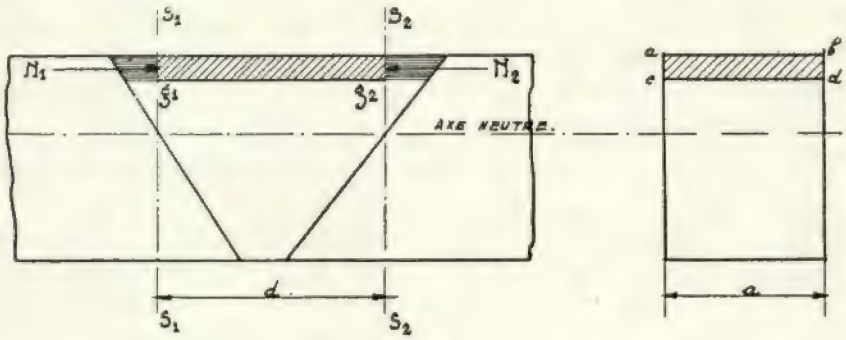


Fig. 32

O prisma de betão *a b c d* tende a escorregar sôbre a superfície G_1 G_2, sob a acção da resultante das duas fôrças longitudinais N_1 e N_2. Convém notar que o esfôrço de escorregamento $(N_2 - N_1)$ aumenta quando o plano de escorregamento se aproxima da fibra neutra. O plano de escorregamento máximo corresponde ao da fibra neutra.

(1) A largura da lage interessada na compressão é a prescrita na Edição original, em francês, ou seja: $12 \times e$. (T. N.)

Para obter o valor do esfôrço de escorregamento máximo, entre duas secções transversais S_1 e S_2, bastará achar a diferença entre as resultantes R_1 e R_2 das tensões normais de compressão, nas duas secções consideradas:

$$G_{1-2} = R_2 - R_1$$

As resultantes R_1 e R_2 obtém-se fàcilmente, se escrevermos que o momento das fôrças exteriores, isto é o momento flector, é igual ao momento das fôrças interiores, tomando para centro de momentos o centro das armaduras de tracção.

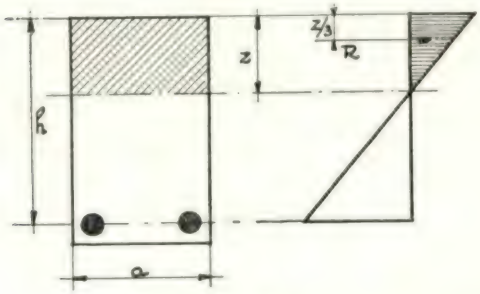


Fig. 33

No caso, por exemplo, duma secção rectangular fig. 33, teremos:

$$M_1 = R_1 \left(h - \frac{Z}{3}\right)$$

$$M_2 = R_2 \left(h - \frac{Z}{3}\right)$$

em que M_1 e M_2 são os momentos flectores respectivamente nas secções S_1 e S_2.

Destas duas eqüações podemos tirar os valores de R_1 e R_2:

$$R_1 = \frac{M_1}{\left(h - \frac{Z}{3}\right)}$$

$$R_2 = \frac{M_2}{\left(h - \frac{Z}{3}\right)}$$

donde:

$$\boxed{G_{1-2} = R_2 - R_1 = \frac{M_2 - M_1}{\left(h - \frac{Z}{3}\right)}} \quad (32)$$

Ao denominador $\left(h - \frac{Z}{3}\right)$ chama-se braço de alavanca do binário das fôrças elásticas. Na prática, adopta-se correntemente para braço do binário 0,75 da altura h.

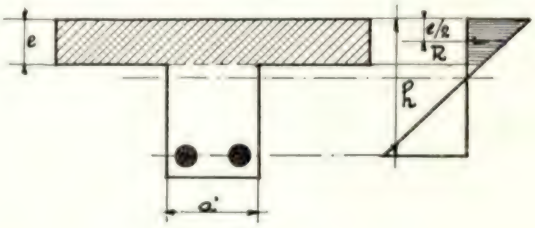


Fig. 34

Consideremos agora o caso duma secção em T, fig. 34.

Teremos:

$$M_1 = R_1 \left(h - \frac{e}{2}\right)$$

$$R_2 = R_2 \left(h - \frac{e}{2}\right)$$

donde:

$$R_1 = \frac{M_1}{\left(h - \frac{e}{2}\right)}$$

$$R_2 - \frac{M_1}{\left(h - \frac{e}{2}\right)}$$

e:

$$\boxed{G_{1-2} = \frac{M_1}{\left(h - \frac{e}{2}\right)} = \frac{M_2 - M_1}{b}} \quad (33)$$

Na prática adopta-se correntemente para b, 0,85 de h.

O esfôrço máximo de escorregamento entre duas secções transversais obtém-se portanto, dividindo a diferença dos momentos flectores nas duas secções, pelo braço de alavanca do binário das fôrças elásticas.

Designando por:

σ — a tensão média de escorregamento entre duas secções transversais.

d — a distância entre as duas secções transversais.

a — a largura da viga.

teremos que, a tensão média de escorregamento entre as duas secções transversais S_1 e S_2 será igual ao cociente do esfôrço de escorregamento G_{1-2}, pela superfície de escorregamento a d:

$$\sigma = \frac{G_{1-2}}{a\,d} \qquad (34)$$

A tensão de escorregamento para o betão normal, não pode em caso algum ultrapassar 14 kg/cm², o que limita evidentemente a largura das nervuras e vigas. (Art. 23.º R. B. A.)

Quando porém esta tensão fôr superior a 6 kg/cm² para as lages e a 4 kg/cm² para as vigas, devem-se prever armaduras transversais (estribos), ou armaduras inclinadas que serão calculadas como capazes de resistir, por si próprias, à totalidade destas tensões.

Para os betões de alta resistência o limite máximo é de 16 kg/cm², sendo respectivamente de 8 kg/cm² e de 6 kg/cm² as tensões para as lages e para as vigas, acima das quais se devem colocar as armaduras atrás citadas [1].

É, no entanto, aconselhável, mesmo no caso de o betão poder resistir por si próprio, que se coloquem estribos espaçados igualmente, duma distância que não deverá ser superior ao menor dos seguintes valores:

a) 15 a 20 vezes o diâmetro das armaduras de compressão de modo a evitar a sua encurvadura e o desprendimento do betão consecutivo.

b) 3/4 da altura útil da viga.

c) a largura da viga

d) 25 a 30^{mm}.

Estes estribos serão constituídos por armaduras verticais de dois ramos, de 5 a 6^{mm} de diâmetro.

Acção dos estribos

Os estribos são geralmente constituídos por armaduras verticais, de forma rectângular ou em U, executados com varões de 5, 6, 8 ou 10^{mm} de diâmetro, que passam em volta das armaduras de flexão ou de encastramento, e que se ligam por meio de ganchos às armaduras de compressão, ou no caso destas não existirem, a dois varões que se colocam especialmente para êste fim.

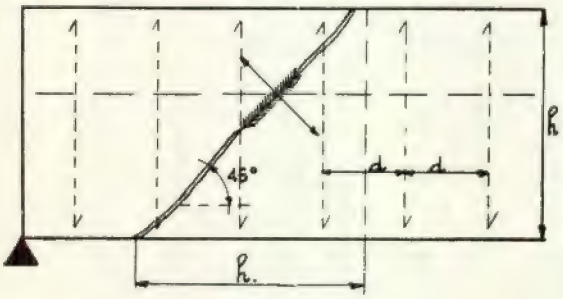


Fig. 35

Nos Quadros seguintes, estão representados os diferentes tipos de estribos utilizados em vigas e de cintas aplicadas nos pilares.

Os estribos aplicados nas vigas podem ser constituídos por dois ou mais ramos verticais O número de ramos depende, como veremos adiante, do valor das tensões de escorregamento.

O papel dos estribos não consiste apenas em resistir aos esforços de escorregamento, mas também, como veremos, ao esfôrço transverso.

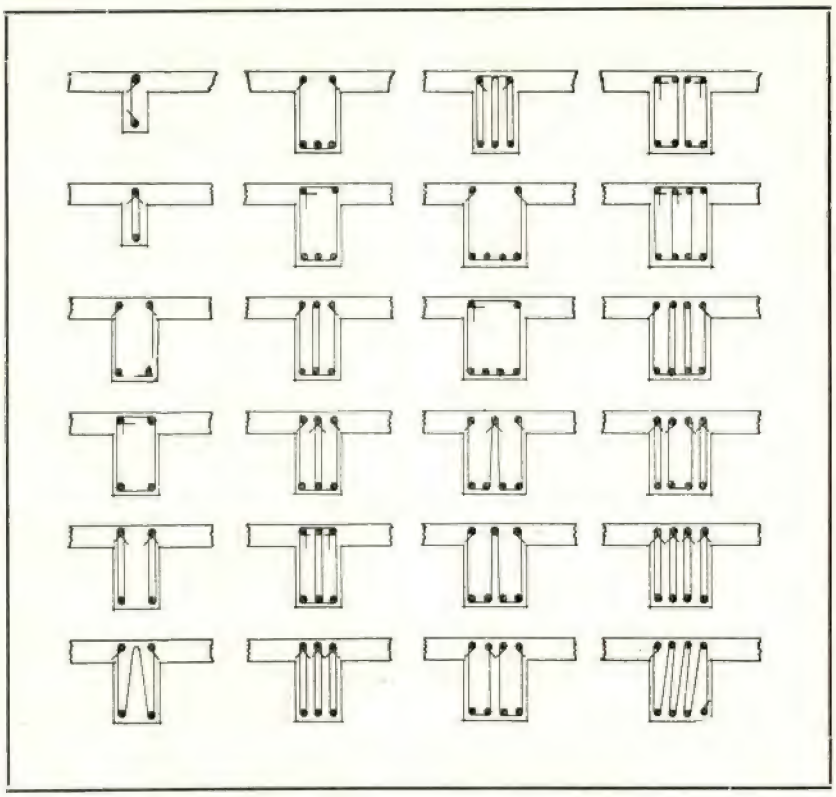
Independentemente dos esforços de escorregamento que tendem a cortar o betão segundo um plano que passa pela fibra neutra, existem sôbre as facetas inclinadas a 45° sôbre a mesma fibra, fig. 35, tensões de tracção devidas ao esfôrço transverso que tem o mesmo valor unitário que as tensões ao corte no mesmo ponto. Portanto, se dividirmos o esfôrço máximo de escorregamento entre duas secções transversais, pela superfície de escorregamento do betão, obtém-se não só, a tensão ao corte, mas também a tensão de tracção sôbre as facetas inclinadas a 45° sôbre a fibra neutra.

Como o betão resiste menos à tracção do que ao corte, a rotura produz-se segundo pla-

[1] Na Edição Original em francês, faz-se apenas referência aos limites fixados pela A. B. S. (N. T.)

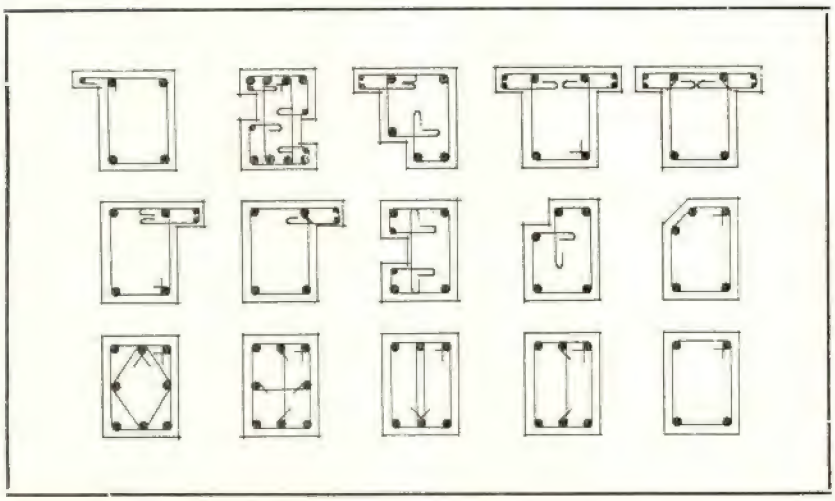
QUADRO I

TIPOS DE ESTRIBOS ADOPTADOS NAS VIGAS



QUADRO II

TIPOS DE CINTAS ADOPTADAS EM PILARES



nos inclinados a 45° sôbre a fibra neutra e não segundo planos horizontais.

Para que a fenda a 45° representada na fig. 35, não provoque a fractura da viga, é necessário que os estribuos verticais que cortam a fenda possam resistir ao esfôrço transverso médio nesse ponto. Os estribos trabalham não só ao corte, mas também à tracção, e é para êste esfôrço que se devem calcular.

As fendas a 45° não se deverão produzir senão quando, a tensão de tracção do betão devida ao esfôrço transverso, ou o que é pràticamente o mesmo, a tensão de escorregamento, não ultrapasse 4 kg/cm², para as vigas rectangulares ou em T, e 6 kg/cm² para as lages.

Quando estes limites são ultrapassados, torna-se necessário prever estribos e calculá-los, como se resistissem por si próprios ao esfôrço transverso pela sua resistência à tracção.

Em nenhum caso a tensão de tracção do betão, abstracção feita da existência de estribos, deverá ultrapassar o limite de 14 kg/cm², como já foi dito [1].

Vamos agora estabelecer a expressão que nos dá a secção dos estribos, supondo, como é natural, que a sua secção é constante.

Designaremos por:

s — a secção dum estribo (soma das secções dos ramos verticais).
n — o número de estritos que cortam a fenda a 45° representada na fig. 35.
T — o esfôrço transverso na secção da fenda.
b — o braço de alavanca do binário das fôrças elásticas.
d — a distância entre estribos.

O número de estribos que corta a fenda a 45° será dado pela relação $\frac{h}{d}$, fig. 35.

Será conveniente, no entanto, não contar com um número de estribos superior ao que dá a relação $\frac{b}{d}$, uma vez que os estribos não tem a altura da viga, mas sim uma altura menor, que tomaremos igual a b.

Se designarmos por t a tensão de tracção dos estribos, poderemos escrever:

$$\boxed{T = \frac{s\,t\,b}{d}} \qquad (35)$$

O esfôrço transverso será, portanto, absorvido pelos estribos compreendidos entre duas secções transversais, distanciadas dum comprimento igual ao braço de alavanca do binário das fôrças elásticas.

Para se obter a tensão de tracção do betão devida ao esfôrço transverso, bastará dividir o esfôrço transverso, pelo produto da largura da viga pelo braço de alavanca do binário das fôrças elásticas:

$$\boxed{\sigma = \frac{T}{a\,b}} \qquad (36)$$

Da expressão (35) poderemos tirar o valor da secção de um estribo:

$$\boxed{s = \frac{T\,d}{t\,b}} \qquad (37)$$

É conveniente notar que, o numerador Td representa a superfície do diagrama dos esforços transversos compreendidos entre dois estribos consecutivos.

Poderemos igualmente, uma vez arbitrada a secção dos estribos, calcular a sua distância ou passo:

$$\boxed{d = \frac{s\,t\,b}{T}} \qquad (38)$$

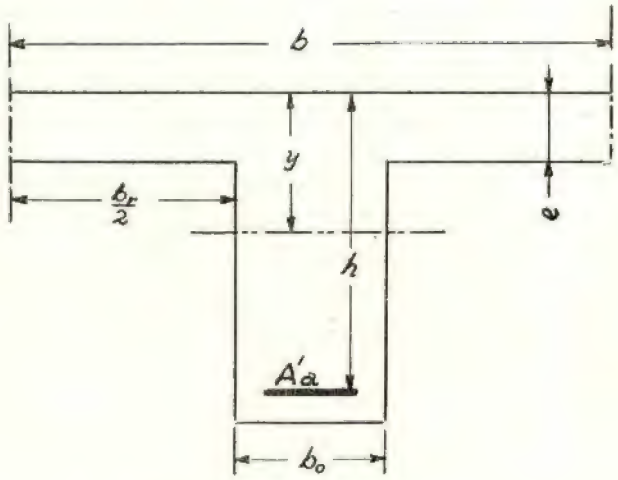
(Continua)

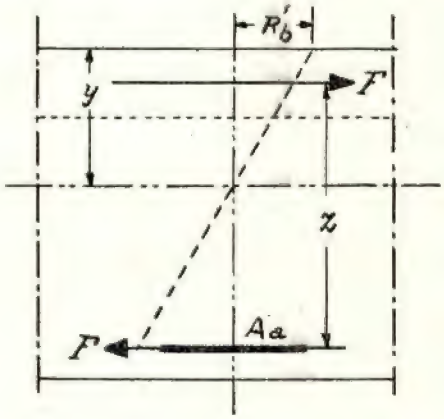
---

[1] Já se indicaram os limites que o R. B. A. prevê para os betões de alta resistência. (N. T.)

Método aproximado para o cálculo directo da altura útil e da secção de armadura nas vigas T de betão armado

POR JOSÉ FALAGUEIRO PINTO FONSECA
ENG.º CIVIL (I. S. T.)





M — Momento flector
F — Componente do binário elástico
z — Braço do binário elástico
b_o — Largura da nervura
b — Largura da lage interessada na compressão
y — Distância da fibra neutra à face comprimida da lage
e — Espessura da lage
h — Altura útil da viga
R'b — Carga de segurança do betão

I — Introdução

No cálculo das secções T, se a fibra neutra cai abaixo da face inferior da lage interessada na compressão, a conhecida fórmula $h = r\sqrt{M/b}$, perde a validade, dando valores tanto menores, em relação aos exactos, (ver tabela do n.º IX) quanto maior fôr a diferença $y - e$.

Temos então que recorrer a ábacos (de que nem sempre se dispõe) ou a tentativas (o que por vezes é bastante moroso) para se procurar uma dimensão adequada para a altura útil da nervura.

Por estas razões, tentámos enveredar por um caminho que nos dê soluções aproximadas da realidade, mesmo quando fôr grande a diferença $y - e$.

Foi o que pretendemos na dedução da fórmula agora apresentada, e em que, pelas hipóteses estabelecidas, conseguimos uma expressão fácil de calcular, simplificada ainda pelo conhecimento prévio dos valores das constantes k e k' que nela entram.

Admitimos para a dedução da fórmula, a constância das relações $s = y/h$, e $t = z/h$, para cada conjunto de valores (R_a, R_b, e m) o que não sendo verdadeiro, é no entanto suficiente para se conseguir o resultado desejado.

A fórmula conduzirá a valores mais aproximados, para pequenos valores da diferença $b_r = b - b_o$ e para vigas T em que a altura útil h é bastante maior que a espessura e da lage; isto é, os valores de h serão tanto mais aproximados, quanto mais a secção da viga se

aproximar da forma rectangular, e para a qual teremos $b_r = 0$, pelo que a expressão de h se transforma em:

$$h = \sqrt{\frac{2\,s\,M}{b_o\,s^2\,t\,R'_b}} = \sqrt{\frac{2}{s\,t\,R'_b}}\sqrt{\frac{M}{b_o}}$$

Ora o valor do primeiro radical, no segundo membro da igualdade, é exactamente o valor da relação $r = \dfrac{h}{\sqrt{\dfrac{M}{b_o}}}$

II — Dedução da expressão de h

Como se sabe, o momento flector pode ser expresso pela relação:

$$M = z\,F$$

Ora da figura pode tirar-se, atendendo ao equilíbrio das fôrças internas e às relações geométricas:

$$F = b_o\,y\,R'_b/2 + (b - b_o)\,e\,[R'_b/2 + R'_b \times$$
$$\times (y - e)/2\,y]$$

Tomando nesta expressão $y = s\,h$, obtemos

$$F = [b_o\,s\,h + (b - b_o)\,e\,(2\,s\,h - e)/s\,h]\,R'_b/2$$

Fazendo agora $z = t\,h$, e, $b_r = b - b_o$, vem para M o valor:

$$M = [b_o\,s\,h + b_r\,e\,(2\,s\,h - e)/s\,h]\,t\,h\,R'_b/2$$

Simplificando esta expressão vem:

$$b_o\,s^2\,h^2 + 2\,b_r\,e\,s\,h - (2\,M\,s/t\,R'_b + b_r\,e^2) = 0$$

Resolvendo esta equação em ordem a h temos:

$$h = -\frac{b_r\,e}{b_o\,s} + \sqrt{\left(\frac{b_r\,e}{b_o\,s}\right)^2 + \frac{1}{b_o\,s^2}\left(\frac{2\,M\,s}{t\,R'_b} + b_r\,e^2\right)}$$

Esta expressão ainda é susceptível de ser simplificada, fazendo:

$k = 1/s$, e, $k' = 2\,s/t\,R'_b$:

$$h = -k\frac{b_r\,e}{b_o} + \sqrt{\left(k\frac{b_r\,e}{b_o}\right)^2 + \frac{k^2}{b_o}(k'\,M + b_r\,e^2)}$$

TABELA

Valores das constantes
($R_a = 1200$ kg/cm², $m = 15$)

R'_b kg/cm²	k	k'	k²
20	5,00	0,0214	25,00
25	4,20	0,0207	17,60
30	3,66	0,0200	13,40
35	3,29	0,0193	10,80
40	3,00	0,0187	9,00
45	2,78	0,0182	7,72
50	2,60	0,0177	6,76
55	2,46	0,0172	6,05
60	2,33	0,0167	5,43
65	2,23	0,0162	4,97
70	2,14	0,0158	4,59

III — Método de cálculo

Dado o momento flector M a que a peça está sujeita, assim como a espessura e da lage e fixada a largura b da zona interessada na compressão, para o que se arbitra o valor de b_o, podemos calcular a altura útil h fixando *a priori* as fadigas máximas a suportar pelos materiais, por meio da expressão:

$$h = -k\frac{b_r\,e}{b_o} + \sqrt{\left(k\frac{b_r\,e}{b_o}\right)^2 + \frac{k^2}{b_o}\left(k'M + b_r e^2\right)}$$

Determinado assim o valor de h, calcula-se a secção necessária de armadura A_a, pela expressão:

$$A_a = \frac{M}{t\,R_a\,h}$$

É possível, para facilitar o cálculo, fixar em tabelas (de que apresentamos em seguida a correspondente a $m = 15$, e $R_a = 1200$ kg/cm²) os valores do produto $t\,R_a$.

R'_b kg/cm²	t	$t R_a$ kg/cm²
20	0,933	1120
25	0,921	1105
30	0,909	1090
35	0,899	1077
40	0,889	1065
45	0,880	1055
50	0,872	1045
55	0,864	1035
60	0,857	1027
65	0,851	1020
70	0,844	1012

IV — Exemplos de cálculo

1) $M = 840.000$ kg.cm $b = 150$ cm $b_o = 30$ cm
$e = 10$ cm
$R'_b = 45$ kg/cm² $R_a = 1200$ kg/cm² $m = 15$

$$h = -2{,}78\,(120 \times 10)/30 + \sqrt{[2{,}78\,(120 \times 10)/30]^2 + [0{,}0182 \times 840.000 + 120 \times (10^2)]} = 28{,}5 \text{ cm}$$

$$A_a = \frac{840.000}{0{,}88 \times 28{,}5 \times 1200} = 27{,}9 \text{ cm}^2$$

Anàlogamente se calculavam os exemplos seguintes, dos quais apresentamos apenas os dados e os resultados:

2) $M = 1.680.000$ kg.cm $b = 150$ cm
$b_o = 30$ cm $e = 10$ cm
$R'_b = 45$ kg/cm² $R_a = 1200$ kg/cm² $m = 15$
$h = 42$ cm
$A_a = 37{,}9$ cm²

3) $M = 2.520.000$ kg.cm $b = 150$ cm
$b_o = 30$ cm $e = 10$ cm
$R'_b = 45$ kg/cm² $R_a = 1200$ kg/cm² $m = 15$
$h = 54$ cm
$A_a = 44{,}1$ cm²

4) $M = 3.560.000$ kg.cm $b = 150$ cm
$b_o = 30$ cm $e = 10$ cm
$R'_b = 45$ kg/cm² $R_a = 1200$ kg/cm² $m = 15$
$h = 66$ cm
$A_a = 48{,}2$ cm²

5) $M = 4.200.000$ kg.cm $b = 150$ cm
$b_o = 30$ cm $e = 10$ cm
$R'_b = 45$ kg/cm² $R_a = 1200$ kg/cm² $m = 15$
$h = 76$ cm
$A_a = 52{,}4$ cm²

6) $M = 5.040.000$ kg.cm $b = 150$ cm
$b_o = 30$ cm $e = 10$ cm
$R'_b = 45$ kg/cm² $R_a = 1200$ kg/cm² $m = 15$
$h = 84$ cm
$A_a = 56{,}8$ cm²

7) $M = 5.880.000$ kg.cm $b = 150$ cm
$b_o = 30$ cm $e = 10$ cm
$R'_b = 45$ kg/cm² $R_a = 1200$ kg/cm² $m = 15$
$h = 97$ cm
$A_a = 57{,}4$ cm²

8) $M = 6.720.000$ kg.cm $b = 150$ cm
$b_o = 30$ cm $e = 10$ cm
$R'_b = 45$ kg/cm² $R_a = 1200$ kg/cm² $m = 15$
$h = 106$ cm
$A_a = 60{,}0$ cm²

9) $M = 7.560.000$ kg.cm $b = 150$ cm
$b_o = 30$ cm $e = 10$ cm
$R'_b = 45$ kg/cm² $R_a = 1200$ kg/cm² $m = 15$
$h = 114$ cm
$A_a = 62{,}8$ cm²

10) $M = 8.400.000$ kg.cm $b = 150$ cm
$b_o = 30$ cm $e = 10$ cm
$R'_b = 45$ kg/cm² $R_a = 1200$ kg/cm² $m = 15$
$h = 123$ cm
$A_a = 64{,}8$ cm²

V — Verificação teórica das secções determinadas no cálculo dos exemplos

Fizemos para cada um dos casos, o estudo das características essenciais da secção (y, I e z) e determinámos também as fadigas dos materiais (R'_b e R_a).

Do conjunto de valores assim obtidos, fizemos o seguinte quadro, em que se apresentam resumidamente os valores atrás referidos e que serviram de têrmo de comparação para o cálculo dos erros.

N.º	y cm	I cm⁴	z cm	R'b kg/cm²	Ra kg/cm²
1	10,25	192000	25,1	44,2	1210
2	15,1	580500	38,1	43,5	1173
3	19,4	1133000	49,1	43,4	1185
4	23,8	1848000	60,7	42,7	1160
5	27,3	2515000	67,7	45,1	1230
6	30,2	3470000	77,3	44,6	1163
7	34,9	4830000	90,7	42,0	1142
8	38,2	6000000	98,4	42,6	1144
9	41,1	7150000	105,2	43,5	1155
10	44,3	8720000	115,0	42,1	1125

VI — Estudo dos erros relativos cometidos nos cálculos dos exemplos

(t.) — Valores teóricos
(c.) — Valores do cálculo

N.º	R'b (t.) kg/cm²	R'b (c.) kg/cm²	Êrro relativo %	Ra (t.) kg/cm²	Ra (c.) kg/cm²	Êrro relativo %
1	45	44,2	—1,78	1200	1210	+0,83
2	45	43,5	—3,34	1200	1173	—2,25
3	45	43,4	—3,55	1200	1185	—1,25
4	45	42,7	—5,10	1200	1160	—3,33
5	45	45,1	+0,22	1200	1230	+2,50
6	45	44,6	—0,89	1200	1163	—3,08
7	45	42,0	—6,67	1200	1142	—4,83
8	45	42,6	—5,33	1200	1144	—4,66
9	45	43,5	—3,34	1200	1155	—3,85
10	45	42,1	—6,45	1200	1125	—6,25

VII — Conclusões

O campo de aplicação da fórmula estudada, estende-se desde a secção T em que a fibra neutra rasa a fase inferior da lage, a tôdas aquelas em que a fibra neutra cai dentro da nervura, sem que os erros cometidos nas fadigas dos materiais sejam relativamente apreciáveis.

Nos casos vulgares da construção civil, a fórmula é aplicável, reservando-se para os casos de grande responsabilidade a verificação dos resultados obtidos.

VIII — Estudo da validade das hipóteses estabelecidas (erros relativos cometidos na fixação de $y = s\,h$ e $z = th$)

(t.) — valor teórico
(a.) — valor arbitrado

N.º	y = s h			z = t h		
	(t.)	(a.)	êrro relativo %	(t.)	(a.)	êrro relativo %
1	10,25	10,1	—1,46	25,1	25,1	0
2	15,1	15,0	—0,66	38,1	36,9	—3,15
3	19,4	19,5	+0,51	49,1	47,5	—3,26
4	23,8	23,5	—1,26	60,7	59,8	—1,49
5	27,3	27,0	—1,10	67,7	66,8	—1,64
6	30,2	30,7	+1,66	77,3	73,9	—4,40
7	34,9	34,5	—1,15	90,7	85,4	—5,85
8	38,2	38,0	—0,52	98,4	93,4	—5,39
9	41,1	41,1	0	105,2	100,5	—4,46
10	44,3	44,2	—0,22	115,0	108,3	—5,82

Atendendo aos resultados obtidos, são válidas as hipóteses estabelecidas, pois os erros relativos são pequenos e de pouca influência nos valores das fadigas dos materiais.

IX — Afastamento dos valores de h calculados pela fórmula em estudo (tomados como valores exatos) e os da fórmula $h = r\sqrt{M/b}$

(v. r.) — valores da fórmula em estudo
(v. c.) — valores da fórmula $h = r\sqrt{M/b}$

N.º	(v. r.) cm	(v. c.) cm	Afastamentos %
1	28,5	28,0	1,75
2	42	39,8	5,25
3	54	48,7	9,84
4	66	56,3	14,7
5	76	62,8	18,2
6	84	68,9	18,0
7	97	74,4	23,2
8	106	79,5	25,0
9	114	84,5	25,9
10	123	87,8	28,6

N. B. — Os valores dos afastamentos são sempre negativos.

CORREIAS TRAPESOIDAIS

F. DE ALMEIDA E CASTRO
E. C. MONTEIRO DE ALMEIDA

Considerações gerais

O princípio das correias trapesoidais baseou-se indubitàvelmente na acção duma corda sôbre uma roldana. Assim como a corda aderia às paredes da garganta da roldana, também a correia aderirá às paredes duma ranhura em V dum tambor, pensou-se.

Inicialmente estas eram apenas aplicadas a impulsionar os ventiladores dos automóveis. Eram umas correias singulares, que permaneciam no seu sítio, a-pesar dos maus caminhos, do calor e dos lubrificantes que nunca logravam danificá-las.

Em vista disto pensou-se em generalizar o seu emprêgo, julgando e muito bem, que se estas vantagens se mantivessem quaiquer que fôssem as dimensões dos tambores e qualquer que fôsse a carga a transmitir, seriam um óptimo instrumento de transmissão. Como para estes casos uma só correia não chegaria, passou-se a usar correias múltiplas, em que ao lado umas das outras chega a haver 20 correias.

Estas correias são particularmente úteis em máquinas onde o espaço limitado não permite o uso de correias planas, suficientemente grandes para transmitir a carga, como é o caso dos veios muito próximos. Ao passar no tambor, a parte exterior da correia dilata-se, enquanto que a parte interior se contrai. Entre as 2 faces há uma superfície na qual não há compressões nem dilatações. É esta a parte da correia encarregada de transmitir a potência.

O efeito de cunha exercido entre os lados da correia e as paredes da garganta do tambor, permite a transmissão de potência com uma tensão relativamente baixa na correia e impõe uma carga também pequena nas chumaceiras dos eixos.

As correias modernas de boa qualidade têm uma secção interior de cautchu que se dobra fàcilmente, e estão compostas por forma a poder resistir ao contínuo dobramento sem deformação apreciável.

As correias fazem-se com ângulos variando entre 28 e 60°. Um ângulo de 38°, chamado ângulo Standard, é considerado satisfatório para a maioria das transmissões, pois é suficientemente pequeno para as transmissões de eixos fixos e suficientemente grande para a transmissão de velocidade.

Neste sistema de transmissão, a forma e dimensões dos tambores são factores tão importantes como as próprias correias. Quere isto dizer que o diâmetro do tambor deve ter uma relação adequada com a espessura da correia, e que o ângulo da ranhura do tambor deve corresponder ao que formam os lados da correia quando se comprime ao redor da garganta. É claro que esta deve ter uma profundidade tal que a superfície interna da correia não toque no fundo da ranhura, o que diminuïria a pressão sôbre os lados.

As transmissões de fôrça em que a correia dê 1/4 de volta entre tambores podem fazer-se, mas submetem a correia a uma flexão lateral torcendo-a numa direcção quando sai dum tambor e logo numa direcção contrária quando sai do outro. Só uma correia que tenha sido moldada com todos os requisitos de técnica pode funcionar bem nestas condições.

A vantagem máxima destas correias, que as impõe à consideração dos técnicos, reside neste facto: ausência de costuras. É êste pequeno pormenor que lhe dá um valor inapreciável.

Cálculo

Ao calcular uma transmissão qualquer, é usual começar por investigar-se qual o esfôrço tangencial a transmitir, e é com base nesta fôrça, corrigida por diversos factores que traduzem a influência das condições de marcha, do local da instalação, etc., que se determinam as dimensões do órgão transmissor.

No cálculo que vamos expor, para as correias trapesóidais, fugiu-se a estas normas: como tôdas as tabelas e diagramas que apresentamos se referem a correias de fabrico americano e como estas são construídas em dimensões unificadas, o que se determina é o número de correias a utilizar para uma determinada transmissão e nunca as dimensões da sua secção. Vejamos:

A unificação americana do fabrico de correias trapesóidais, especifica que elas apenas serão produzidas com cinco perfis «standard» diferentes, designados por A, B, C, D e E, em ordem crescente, com as dimensões indicadas na fig. 1. O ângulo α apontado é, para todos os perfis, dum valor próximo de 40°.

A cada um daquêles perfis, corresponde a um valor mínimo para o diâmetro primitivo do tambor. Estes valores, são:

100^{mm}	para	o	perfil	A
150^{mm}	»	»	»	B
230^{mm}	»	»	»	C
330^{mm}	»	»	»	D
540^{mm}	»	»	»	E

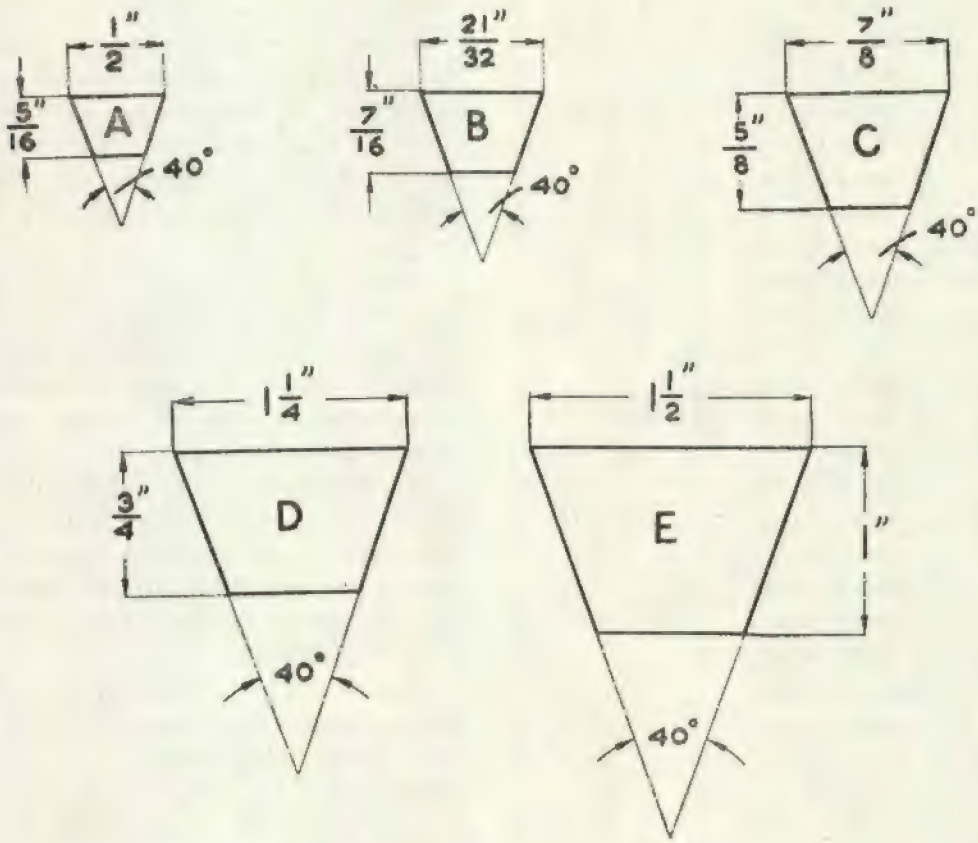


Fig. 1

Isto assente, vejamos como efectuar o cálculo duma transmissão:

Sejam dados a relação de transmissão, a potência N em HP a transmitir e o número n de rotações por minuto do veio motor.

1.°) Determina-se o perfil da correia a

TABELA I

H. P.	R. P. M.	Perfil
1/2	900 a 1.800	A
3/4	900 a 1.800	
1	700 a 1.800	
1 1/2	700 a 1.800	
2	700 a 1.800	A ou B
3	700 a 1.800	
5	900 a 1.800	
5	700 a 800	B
7 1/2	1.200 a 1.800	A ou B
7 1/2	900 a 1.100	B
7 1/2	600 a 800	B ou C
10	1.600 a 1.800	A ou B
10	900 a 1.500	B
10	700 a 800	B ou C
10	600	C
15	1.600 a 1.800	B
15	900 a 1.500	B ou C
15	600 a 800	C
20	1.600 a 1.800	B ou C
20	600 a 1.500	C
25	600 a 1.800	
30	600 a 1.800	
40	1.600 a 1.800	
40	700 a 1.500	C ou D
40	500 a 600	D
50	700 a 1.800	C ou D
50	500 a 600	D
60	1.600 a 1.800	C
60	900 a 1.500	C ou D
60	500 e 800	D
75	1.600 a 1.800	C
75	900 a 1.500	C ou D
75	500 a 800	D ou E
100	1.800	C
100	700 a 1.700	D
100	500 a 600	D ou E
125	700 a 1.700	D
125	500 a 600	E
150	900 a 1.200	E
150	700 a 800	D ou E
150	400 a 600	E
200 e mais	Tôdas as velocidades	E

empregar. Esta escolha baseia-se na potência N e na velocidade angular n, por consequência na grandeza da fôrça periférica a transmitir. A tabela (I) dispensa a avaliação desta fôrça.

Em alguns casos, aconselha-se indiferentemente dois perfis vizinhos. Quando assim sucede, é prudente adoptar o perfil mais forte; por vezes, porém, tal se não pode fazer: é o caso de haver qualquer restrição no que respeita ao diâmetro do tambor empregado. Então, pode acontecer que não seja possível, utilizar o perfil maior.

2.º) Calcula-se qual a potência N' que cada correia do tipo escolhido é capaz de transmitir nas condições reais do funcionamento.

Para tanto, existem várias tabelas, fornecidas pelos fabricantes, e que nos dão a capacidade de transmissão em HP em função do número de rotações por minuto e do diâmetro do tambor do veio motor, ou melhor, em função da velocidade de trabalho da correia, em condições ideais de funcionamento.

Os valores dados em tais tabelas, como é natural, dada a unificação de que falámos em pouco diferem duns para outros construtores. A tabela (II) que apresentamos junto, foi compilada com os valores mais pessimistas que achámos.

Há a notar que os fabricantes em caso algum se responsabilizam por correias trabalhando a velocidades superiores a 25 metros por segundo, porque isso determina um excesso de fadiga sôbre as mesmas que as pode romper.

A tabela II está porém organizada supondo determinadas condições de trabalho da correia, como sejam: relação de transmissão de 1:1, isto é, ângulo de contacto de 180°, marcha suave, sem choques nem vibrações, e arranque em vazio. Logo, se nos quisermos transportar às condições reais de funcionamento, há que introduzir os factores de correcção de que já falámos. São êles:

a) Correcção devida ao ângulo de contacto. Efectivamente a potência transmitida baixa com a diminuïção do ângulo de contacto. Êste ângulo é dado por:

$$W = 180^\circ - 60\frac{D-d}{C}$$

Sendo D e d em milímetros, os diâmetros primitivos dos tambores maior e menor e C a distância de centro a centro dos veios dêstes tambores, também em milímetros.

TABELA II

Perfil	A	B	C	D	E
Diâmetro mínimo	100 m/m	150 m/m	230 m/m	330 m/m	540 m/m
Veloc. m/seg.	H. P.				
2	0,5	0,7	1,4	2,6	3,5
3	0,7	0,9	2,0	3,8	5,1
4	0,8	1,2	2,5	5,0	6,7
5	1,0	1,4	3,0	5,7	7,7
6	1,1	1,6	3,6	6,9	9,2
7	1,3	1,9	4,2	8,0	10,7
8	1,5	2,2	4,8	9,0	12,2
9	1,7	2,5	5,4	10,2	13,7
10	1,9	2,8	6,0	11,2	15,2
11	2,1	3,1	6,5	12,2	16,6
12	2,3	3,4	7,0	13,2	18,0
13	2,4	3,6	7,5	14,2	19,4
14	2,6	3,9	8,0	15,2	20,7
15	2,8	4,1	8,5	16,2	22,0
17	3,1	4,6	9,4	18,0	24,2
20	3,5	5,2	10,6	20,4	27,4
25	4,1	6,0	12,1	23,0	30,7

É importante observar que, se um dos tambores fôr de rasto plano, o valor D é superior ao diâmetro do rasto de uma quantidade variável com o perfil da correia usada.

Assim, para os perfis A, B, C, D e E, a adição em milímetros é, respectivamente, de 8, 11, 16, 19 e 25.

O factor de correcção devido ao ângulo W é um factor experimental, portanto, dado em tabelas. Pode ser usada a tabela III que junto apresentamos.

Também para a determinação dêste factor, que designaremos mais adiante por K_1, é, muitas vezes, utilizado o ábaco da fig. 2, que dá uma aproximação suficiente.

b) Correcção devida às condições de funcionamento. Os factores respeitantes a esta correcção são os que damos na tabela IV.

Os menores valores correspondem a marcha sem choques nem vibrações, arranque em vazio ou quási, e paragens pouco freqüentes; como se vê, são três estas condições, sendo de 0,6 a diferença entre os maiores e os menores valores de cada classe. Em conseqüência, por cada uma destas condições que deixe de verificar-se, deverá adicionar-se ao menor factor, 0,2 ou 0,1 conforme a ausência fôr total ou parcial.

TABELA III

Ângulo	Factor
120°	0,80
130°	0,83
140°	0,87
150°	0,91
160°	0,94
170°	0,97
180°	1,00

Êste factor será designado por K_2.

Finalmente, o número real de H. P. transmitidos por cada correia nas condições dadas, é obtido multiplicando por K_1 e dividindo por K_2 o número N'' encontrado na tabela II, isto é:

$$N' = \frac{N''.K_1}{K_2}$$

3.º) Acha-se o número de correias indispensáveis para a transmissão ser efectuada. Êste é, naturalmente obtido pelo cociente da potência total a transmitir N, pela potência N' por correia:

$$n' = \frac{N}{N'}$$

O número *n'* adoptado será, evidentemente, o número inteiro imediatamente superior ao valor daquela fracção.

4.º) Determina-se o perímetro das correias a usar. Como já foi frisado, estes ór-

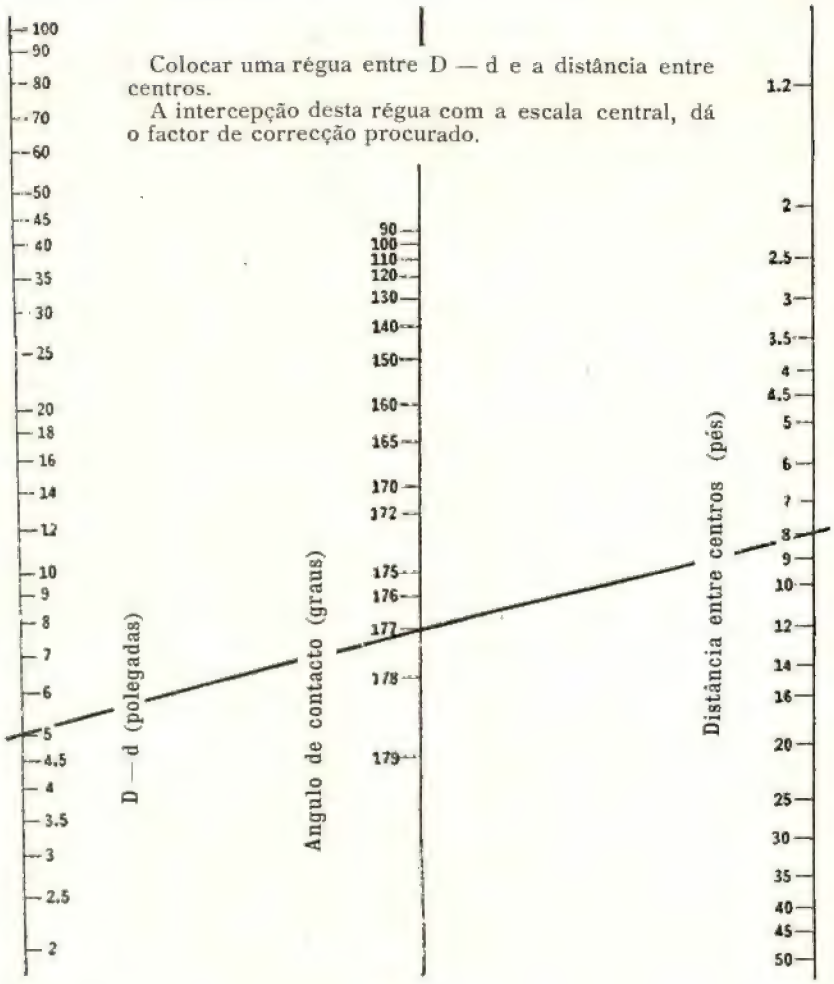


Fig. 2

TABELA IV

Utilização	Factor
Bombas centrífugas, pequenos ventiladores, geradores eléctricos, compressores, rotativos, etc.	1,0 a 1,6
Correias transportadoras, grandes ventiladores, maquinaria para produtos alimentares, máquinas-ferramentas, bombas alternadoras, máquinas têxteis, etc.....	1,1 a 1,7
Moagens, elevadores, moinhos para papel, prensas de choque, compressores alternativos, etc.	1,2 a 1,8

gãos de transmissão não têm juntas, quere dizer, são inteiriços. Tem, por isso, cada correia um perímetro fixo, pelo que só poderá ser aplicada quando êsse mesmo perímetro é exigido.

Se forem D e d os diâmetros primitivos dos tambores e C a distância entre centros, o perímetro da correia medido sôbre os círculos primitivos, é dado por:

$$L = 2\,C + 0{,}251\,\frac{(D-d)^2}{C} + 1{,}57\,(D+d)$$

Temos de procurar, então, n' correias de perfil escolhido e que tenham um perímetro *primitivo* igual ao L calculado. Em regra, os construtores americanos, e são estes os principais, fabricam estas correias para os perímetros *internos* usuais desde 26″ a 128″ (perfil A), 35″ a 298″ (perfil B), 51″ a 358″

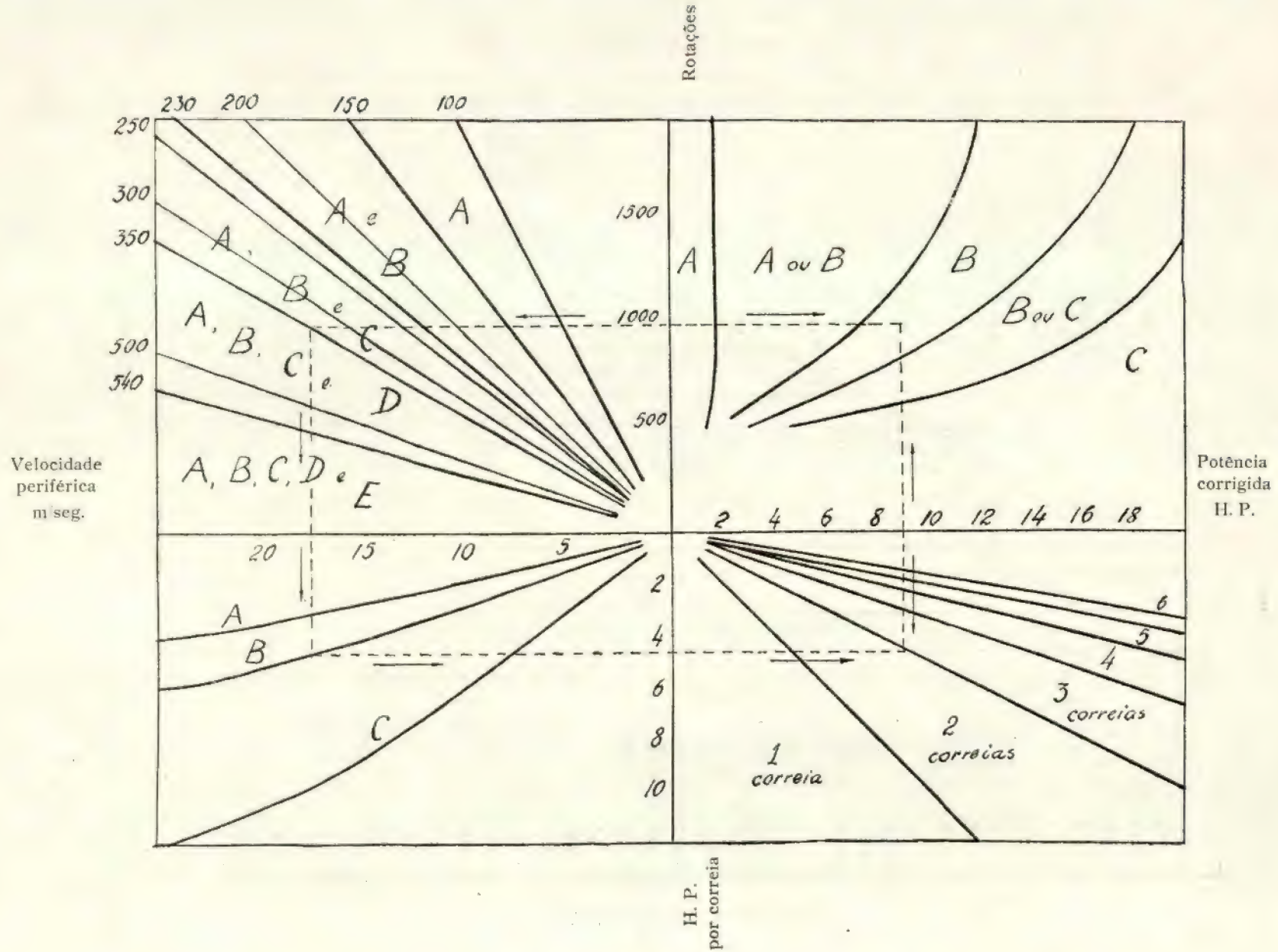

Rotações
230
200
150
100
250
300
350
500
540
1500
1000
500
A e
A
B
A
B e
C
A, B, C e
D
A, B, C, D e
E
A
A ou B
B
B ou C
C
Velocidade
periférica
m/seg.
Potência
corrigida
H. P.
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
15
10
5
2
4
6
8
10
A
B
C
1
correia
2
correias
3
correias
4
5
6
H. P.
por correia

Fig. 3

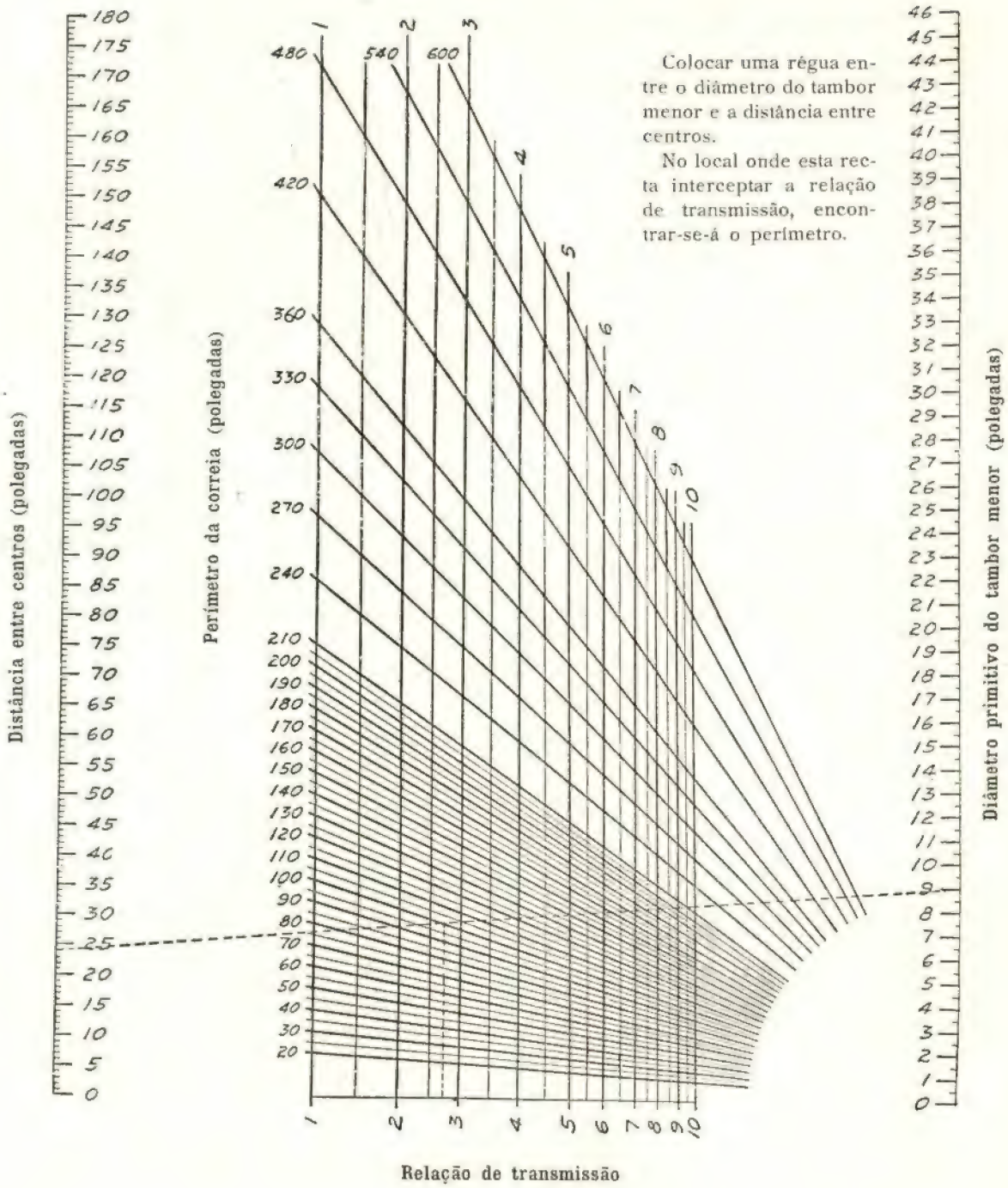

Colocar uma régua entre o diâmetro do tambor menor e a distância entre centros.
No local onde esta recta interceptar a relação de transmissão, encontrar-se-á o perímetro.
Distância entre centros (polegadas)
Perímetro da correia (polegadas)
Diâmetro primitivo do tambor menor (polegadas)
Relação de transmissão

Fig. 4

(perfil C), 120″ a 358″ (perfil D) e 180″ a 358″ (perfil E).

A diferença entre o perímetro primitivo e o interno é de 1″ (perfil A), 1″,2 (perfil B), 2″ (perfil C e D) e 3″ (perfil E). Quando se não encontrar rigorosamente o perímetro calculado, serve muito bem o imediatamente inferior. Isso se traduzirá por um ligeiro aumento na tensão da correia, que é perfeitamente admissível dentro das sucessivas aproximações que o cálculo comporta.

Determinado, então, o perfil, o perímetro e o número de correias, está a transmissão calculada. Um cálculo prévio e rápido pode ser feito utilizando os ábacos que apresentamos nas figuras 3 e 4, o primeiro para a determinação do tipo e número de correias necessários, e o segundo para a determinação aproximada do perímetro. A notar apenas que no primeiro se entra já com a potência corrigida, isto é, com o valor N' explicado atrás.

Designação

Quási todos os construtores designam as correias trapesóidais de forma semelhante. Assim, 8 B 5, segundo uns, B 85 segundo outros ou ainda 85 B, designa sempre uma correia de perfil B com um perímetro interno de 85 polegadas.

Cremos que, com isto, todos ficarão aptos a calcular uma transmissão dêste tipo hoje francamente recomendado lá fora para pequenas distâncias entre centros e altas relações de transmissão, e a ordenar a respectiva encomenda ao fabricante.

VIDA ESCOLAR E ASSOCIATIVA

Era dever indeclinável da Direcção da Associação dar periòdicamente notícia do seu critério directivo, dos seus actos e projectos. A «Técnica» é o veículo mais cómodo e eficaz. Um certo desleixo e açambarcantes afazeres têm-nos impedido até agora de cumprir esta obrigação.

A norma suprema a que tentamos subordinar tôda a nossa orientação é esta: — a Direcção da Associação deve representar, com isenção e nobreza, as legítimas aspirações de todos os alunos, defender os seus justos interêsses não por processos deselegantes, indisciplinares e deseducativos, mas com dignidade, correcção e firmeza.

É evidente que a Associação não pode ser um mero clube desportivo, um agrupamento revolucionário pronto a resolver a murro na mesa as mais fantasiosas pretensões, um grémio de «caçadores de diplomas» espreitando todos os pretextos para se esquivar ao trabalho e outros deveres, uma facção ou partido que afugente automàticamente os alunos de diferentes ideologias.

À Associação têm obrigação de pertencer todos os alunos do Instituto. Em contrapartida a sua Direcção deve saber interpretar, defender e auscultar os direitos de todos, sem atender a côres ou simpatias.

Importa não confundir as idéias pessoais de cada membro da Direcção com «política facciosa». Todo o homem digno tem opiniões próprias, — respeita-as, ama-as, serve-as — mas não pode servir-se de posições estratégicas para as impor com deslealdade.

No rasto desta doutrina a Direcção tem procurado ser em tudo imparcial, e se uma ou outra vez o não conseguiu, a culpa foi da natureza humana que não permite seres sem mácula e dos sócios atingidos que se não queixaram. A Direcção sempre aceitou e aceita tôdas as sugestões justas: — e não faz mais que o seu dever.

Há um aspecto sob que se nos revelou a Associação e que, para honra da Escola e de todos, não pode, por qualquer motivo, manter-se mais: — é a sua notável falta de prestígio entre muitos dos que a rodeiam. Não se vai aqui discutir ou averiguar as origens de tal fenómeno; mas isto não pode continuar, já porque a Direcção é constituída por homens que têm obrigação de ser rectos e probos e são responsáveis, já porque os interêsses dos alunos e do próprio Instituto o exigem imperativamente.

Para matar êste vício duma vez para sempre, não se poupou a Direcção a esforços, e foi neste sentido que polarizou o melhor do seu zêlo e energias.

A Associação deve ter personalidade, saber respeitar-se a si própria, e impor-se à consideração alheia. E assim os Senhores Professores terão um instrumento precioso para sondar e orientar a evolução e necessidades dos seus alunos. Os estudantes, compreendendo o partido que podem tirar duma Associação bem organizada, hão-de adquirir a noção do seu valor, da disciplina, da solidariedade. Em suma, a Associação pode ser simultâneamente forte elemento de progresso interno e o melhor agente de propaganda e prestígio do Instituto.

O carinhoso patrocínio do Senhor Director nunca foi regateado, e esperamos que todos os Senhores Professores olhem para esta função da Associação com tôda a solicitude e interêsse.

A supressão das Assembléias gerais, se eliminou muitos desacatos e episódios graves e ridículos, criou dificuldades sérias.

Afigura-se-nos que seria útil o ensaio de assembléias constituídas pelos alunos dos três últimos anos, impondo-se-lhes escrupulosa ordem e disciplina; se se malograsse a tentativa...

Para preencher de algum modo a lacuna, criou a actual Direcção o Conselho Cultural e o Conselho Fiscal.

A êste último compete discutir e assinar os balancetes mensais, aliviando a responsabilidade do tesoureiro e impossibilitando aborrecimentos de anos anteriores.

Ao Conselho Cultural – que não deve confundir-se com a Secção Cultural da Associação — constituído por oito alunos do último ano, pertence um papel muito mais importante.

Os seus membros devem representar com indiscutível autoridade as idéias legítimas de todos os estudantes.

O Conselho Cultural substitue de facto a Assembléia Geral, e substituí-la-á com vantagem se os seus membros forem sempre escolhidos, com escrúpulo, entre os alunos mais categorizados do último ano.

O Conselho Cultural é naturalmente constituído pelo Presidente e Vice-Presidente da Associação, pelos Directores da «Técnica», do Departamento Aeronáutico, do Grupo Desportivo, da Secção Cultural e por mais dois alunos escolhidos pela Direcção da Associação ou pelos membros referidos ou ainda por motivo do interêsse manifestado pelos próprios.

O Conselho Cultural não tem poder executivo, nem deve perturbar ou entravar a actividade da Direcção.

Cumpre-lhe estudar e pronunciar-se sôbre tôdas as questões que pela sua maior transcendência ou «carácter revolucionário» exijam criteriosa, madura e sensata discussão dum grupo de rapazes sérios e conscenciosos.

As suas deliberações possuem, dêste modo, todos os requisitos para merecer o respeito e a atenção do Senhor Director, dos Senhores Professores, dos alunos.

As linhas estruturais da cultura moral, intelectual e

física que a Associação deve fornecer aos alunos são da sua responsabilidade.

Cabe-lhe ainda estudar o melindroso assunto de deficiências e êrros crónicos que se manifestam no Instituto e apresentar ao Senhor Director sugestões neste sentido.

Se as coisas caminharem bem, não passará muito tempo antes que se obtenha uma representação da Associação no Conselho Escolar.

Numa palavra, o Conselho Cultural deve ter uma composição que o imponha pela honestidade, serenidade e inteligência com que aborda os mais melindrosos problemas que se levantam na nossa Escola.

* * *

A Direcção actual tem reünido tôdas as quintas-feiras do período escolar, lavrou tôdas as actas respectivas, tem apresentado balancetes mensais que distribue pelos sócios, criou uma secção colonial, e uma secção automobilística, já tem a funcionar um duplicador, e vai principiar a instalação de duches quentes.

Tôdas as secções têm tido zelosa e edificante actividade: — os desportos estão em desenvolvimento progressivo, o Departamento Aeronáutico nunca conheceu um ritmo mais intensivo e regular, a Secção Cultural tem uma fôlha de serviços óptima — freqüentes sessões de cinema técnico, desportivo e de cultura geral, conferências, «fôlhas», filmagem, etc.

* * *

O regulamento da Biblioteca também mereceu a atenção da Direcção da Associação.

Foram alvitradas modificações muito notáveis no horário de funcionamento da Biblioteca, e no regimen de requisição de livros. Estão já há muito tempo em vigor, depois de rectificadas pelo Senhor Bibliotecário, que tratou com a Direcção com a máxima gentileza. Uma regalia importante foi concedida aos alunos do sexto ano: — poderem requisitar livros por oito dias.

* * *

A marcação de exames e a duração das férias foram tratadas com o Senhor Director e com o Senhor Eng.º Carrisso dentro dum espírito de leal colaboração e entendimento.

* * *

Ao Senhor Director, aos Senhores Professores e Assistentes, a todos os alunos, agradecemos o solícito apoio prestado e garantimos-lhe que se todos quiserem — e estamos seguros de que querem — dentro de muito poucos anos a nossa Associação estará à altura das grandiosas instalações com que a dotou o nosso antigo director — o ilustre Ministro das Obras Públicas — e será em tôda a extensão a primeira Associação Académica de Portugal.

A Direcção

Pontos Modelos de Exame de Aptidão

Satisfazendo numerosos pedidos, publicamos alguns pontos dos exames de aptidão ao I. S. T. realizados nos dois últimos anos.

Matemática

I — Uma estante contém livros repartidos igualmente por p prateleiras. O número de prateleiras é 6,5 vezes menor que o número de livros de cada uma, e o número de combinações dos livros de cada prateleira tomados p a p é 46 vezes maior que o número de combinações $p-2$ a $p-2$. Quantos livros há na estante?

II — Verificar a identidade: $1 - \operatorname{tg}^4 x = \dfrac{\cos 2x}{\cos^4 x}$.

III — Qual é o número cuja raíz quarta é igual à raíz quadrada, menos 42? Verifique o resultado.

IV — Dado um triângulo rectângulo de catetos a e b e um ponto P sôbre a hipotenusa, determinar a posição dêste ponto de forma que a soma das suas distâncias aos catetos seja um número dado K. Indicar os valores possíveis de K e analisar o que se passa no caso de ser a igual a b.

V — Um tetraedro regular está inscrito numa esfera de raio R. Qual é a distância da superfície esférica ao centro de cada face?

VI — Numa circunferência de raio R traça-se um triângulo inscrito. Dois dos lados dêste triângulo limitam segmentos circulares cujas alturas são $\dfrac{R}{6}$ e $\dfrac{R}{8}$. Calcular a área do triângulo.

VII — Determinar os valores de n e m para os quais a desigualdade $(m^2 - 2m)x^2 + 3{,}6x + 2m - n > 0$ só se verifica para valores positivos de x inferiores a 10.

VIII — Uma pessoa sobe uma escada à razão de 1 degrau por segundo e desce-a com o dôbro da velocidade.
Outra pessoa sobe à razão de 1,5 degraus por segundo e desce igualmente com o dôbro da velocidade.
Partindo ambas simultâneamente da base da escada a mais rápida chega ao cimo, pára 2 segundos e desce, cruzando-se com a mais lenta no 30.° degrau a contar de baixo. Quantos degraus tem a escada e que diferença de tempo levam as 2 pessoas a fazer o percurso de ida e volta?

IX — Calcular o valor de T dado pela seguinte expressão que aparece no estudo das correias de transmissão $T = F \frac{e^{f\theta}}{e^{f\theta} - 1}$ sendo $F = 120$, $f = 0{,}3$, $e =$ base dos logarítmos neperianos $= 2{,}71828$, θ medida circular do ângulo 140°.

X — Dadas as expressões $x_1 = A \operatorname{sen} \alpha$, $x_2 = A \operatorname{sen} (\alpha - 120°)$, $x_3 = A \operatorname{sen} (\alpha - 240°)$ verificar a identidade $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = {}^3/_2 A^2$.

XI — É dada uma circunferência de raio R e um trapézio isósceles circunscrito. Os lados iguais do trapézio valem $\frac{9}{4}$ R; quais são os comprimentos dos 2 outros lados?

XII — Numa esfera de raio R inscreve-se um cubo. Qual é a distância da superfície esférica ao centro de cada aresta?

XIII — Um lojista no fim do primeiro dia da semana tinha em caixa a quantia de 112$00 distribuídos em moedas de 1$00, de 2$50 e de 5$00. Verificou então que o número total de moedas em caixa era igual a 31. No início do dia seguinte teve de fazer um pagamento de 7$00 e para isso retirou da caixa duas moedas de 1$00 e uma moeda de 5$00. Logo após êste pagamento contou o dinheiro da caixa e verificou que as moedas de 5$00 prefaziam uma quantia igual ao dôbro da quantia relativa a tôdas as outras moedas que lá estavam. Quantas moedas de 1$00, quantas de 2$50 e quantas de 5$00 tinha o lojista em caixa no fim do primeiro dia da semana?

XIV — Resolver a equação $\frac{\operatorname{sen} 2x}{2} = \operatorname{tg} 3x$.

XV — Dadas as expressões: $e = \sqrt{2}\, E \operatorname{sen} (\omega t - \varphi_1)$, $i = \sqrt{2}\, I \operatorname{sen} (\omega t + \varphi_2)$, em que o tempo t é única variável e que representam respectivamente a tensão aplicada a um circuito e a corrente alternada que o atravessam, mostrar que o valor instantâneo da potência posta em jôgo no circuito e definida pelo produto $p = ei$, é dado pela expressão:
$p = EI [\cos (\varphi_1 - \varphi_2)] - \cos [2 \omega t + \varphi_1 + \varphi_2]$.

XVI — Dada uma circunferência de raio R, um diâmetro, uma corda normal ao diâmetro a uma distância do centro igual a $\frac{2}{3}$ R e um ponto P sôbre a circunferência, determinar a distância dêste ponto ao diâmetro, para que a área dum triângulo que tem a corda por base e êsse ponto por vértice, seja $\frac{1}{3}$ da área do círculo

XVII — Uma esfera de raio R, é cortada por dois planos paralelos cujo afastamento é $\frac{1}{3}$ de R. Quais devem ser as distâncias dos planos ao centro da esfera, para que as áreas das duas secções estejam entre si como $\frac{1}{2}$.

XVIII — Um plano corta um cubo de aresta a normalmente a uma diagonal e passa pelo meio das três arestas que concorrem num vértice. Qual é o volume do tetraedro que fica compreendido entre o plano e êsse vértice?

XIX — São dados 2 números. O primeiro é meia proporcional entre o segundo e metade da diferença entre o segundo e o primeiro, o segundo é meia proporcional entre o primeiro e 48. Quais são os números?

XX — Possuem-se duas qualidades de um adubo contendo percentagens desconhecidas de matéria activa. Sabe-se que juntando à primeira 20 % de areia se obtém um adubo com 12 % de matéria activa e que juntando à segunda 10 % de areia se obtém um adubo com 18 % de matéria activa. Que pesos das duas qualidades existentes se devem misturar para obter uma tonelada de adubo com 16 %?

XXI — Uma ilha tem 6.000 habitantes e a população aumenta 2,5 % ao ano. A quantidade de trigo que a ilha produz aumenta cada ano 7.000 kg e presume-se que daqui a quinze anos a produção começa a ser insuficiente para o consumo. Qual é a produção actual do trigo, sabendo-se que cada habitante consome em média 50 kg por ano?

XXII — Numa circunferência de raio R inscreve-se um triângulo isósceles em que a base é igual a metade de um dos outro lados. Calcular a área do triângulo e o comprimento dos 3 arcos em que a circunferência fica dividida.

XXIII — Dada uma circunferência de raio R e uma corda que passa à distância $\frac{1}{2}$ R do centro, determinar as áreas em que o círculo fica dividido.

XXIV — Numa pirâmide hexagonal regular, ôca e invertida, com o lado da base igual a l, e a altura $4l$, lança-se uma esfera de raio igual a $\frac{1}{2}$ l. A que distância do vértice fica o centro da esfera?

Ciências físico-químicas

I — Funções químicas. Grupos funcionais. Exemplifique com 3 funções químicas importantes da química mineral ou da química orgânica.

II — Uma solução aquosa de cloreto de sódio contém 23 gramas de sal em 100 cc. da solução a 20 graus centígrados. O pêso específico desta solução à mesma temperatura é igual a 1,148 gr/cc. Exprimir a concentração da solução em moléculas — gramas de cloreto de sódio por 1.000 gramas de água. (Cl = 35,5; Na = 23).

III — Se fôr possível receber o gás de iluminação (gás da hulha) que sai de qualquer torneira da canalização dum laboratório numa campânula invertida sôbre uma tina hidropneumática como deverá colocar-se o tubo que dá saída ao gás para a campânula.

IV — Como se poderá separar nos respectivos componentes uma mistura de bióxido de manganês e carvão?

V — Porque razão não se empregam hoje, senão muito raramente as lâmpadas eléctricas de filamento de carvão?

VI — Problemas da estática; medição de fôrças; composição e decomposição de fôrças.

VII — Demonstrar que na refracção da luz através dum prisma o raio emergente e o raio incidente ficam equidistantes do ponto de intercepção das normais às faces do prisma nos pontos de incidência e emergência.

VIII — Parece-lhe que a expressão: «a fôrça dêste motor é igual a 45 cavalos» contém algumas incorrecções?

IX — O que é que limita o emprêgo do mercúrio nos termómetros para avaliar altas temperaturas e como pode remediar-se êste inconveniente?

X — Que indicações práticas pode tirar da fórmula do gás amoníaco?

XI — Um calcáreo tem a seguinte composição química:

Água	13,8
Carbonato de cálcio	80,0
Carbonato de Magnésio	4,2
Sílica	2,0

Determinar a composição qualitativa e quantitativa da cal que se obtém pela calcinação dêste calcáreo.

XII — Qual a razão porque um alcool que é um composto hidroxilado não tem reacção básica?

XIII — Será fácil distinguir o ouro do latão?

XIV — Como se produzem e para que servem os raios X?

XV — Termometria. Escalas de temperatura. Termómetros e pirómetros.

XVI — Um avião pesa 10 T e desloca-se com a velocidade de 180 km/h. Possue um motor de 400 cavalos, que consome por hora 180 l de gasolina cujo pêso específico é igual a 0,7 gramas/cm³. Sabendo que cada litro de gasolina ao queimar-se fornece 10.000 calorias, calcular o rendimento motor e a fôrça viva do avião. Os rendimentos dos motores de explosão são muito elevados?

XVII — É vulgar em linguagem corrente exprimir o consumo das instalações eléctricas em Hectowatts. Parece-lhe correcta a escolha desta unidade?

XVIII — O que são e para que servem os retrovisores e os periscópios?

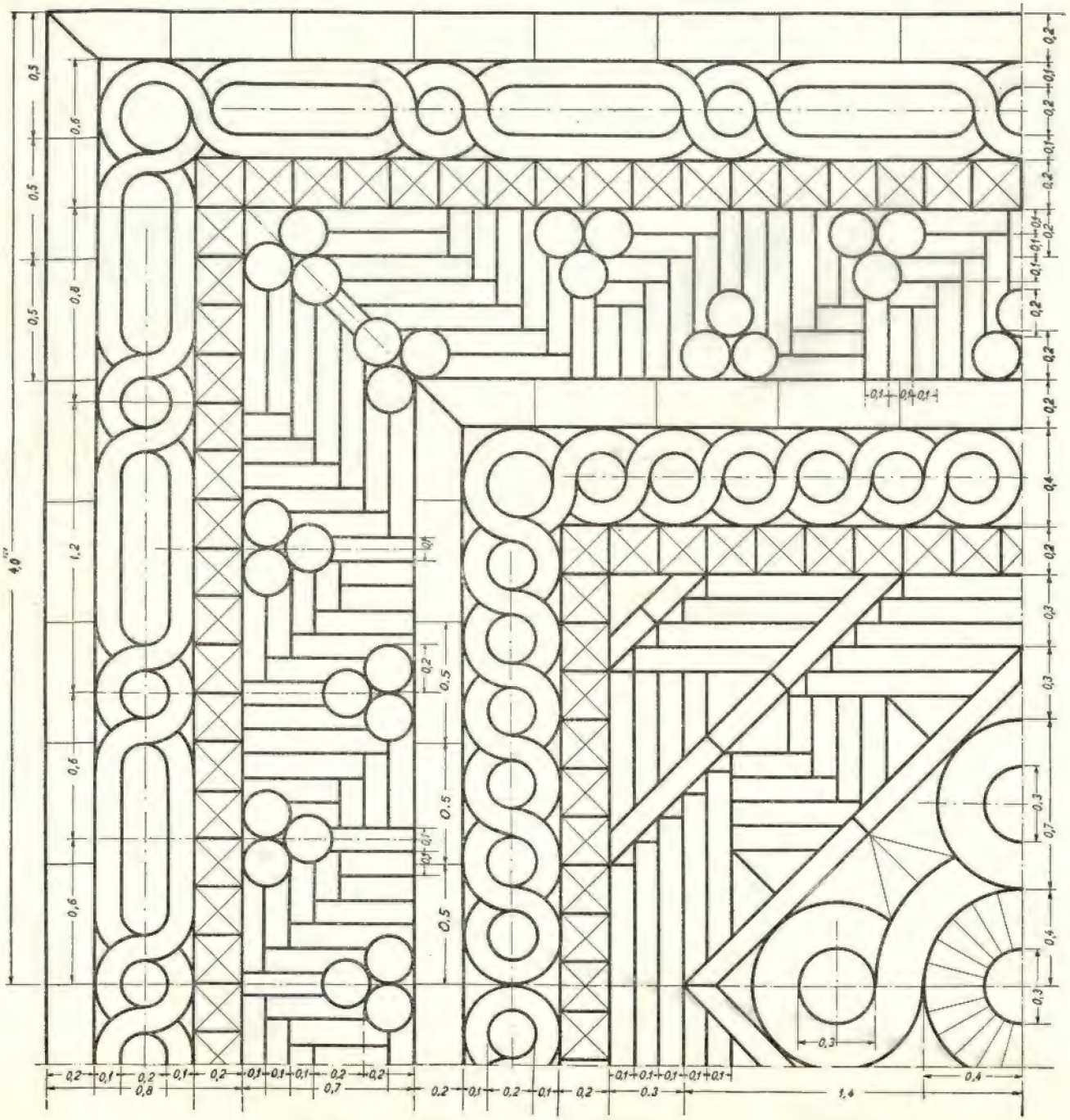
XIX — Reacções de salificação (neutralização) e esterificação?

Analogias e diferenças. Exemplos e aplicações.

XX — Se a deflagração da pólvora negra pode traduzir-se pela seguinte equação química não acertada:

$NO^3K + S + C \rightarrow SK^2 + CO^2 + N^2$ achar a composição centesimal em pêso dêste explosivo em nitrato, enxôfre e carbono e o volume de gases produzido por 27 grs de pólvora sabendo-se que: C = 12; K = 39,1; S = 32; O = 16; N = 14.

XXI — Porque razão é costume cobrir de areia as peças de ferro fortemente aquecidas que se pretende soldar?



Desenho a executar :

Conforme o modêlo anexo, em pormenor e em conjunto.

Esquadria :

Com as dimensões 48 × 68 cm.

Legenda :

Conforme o modêlo junto.

Designação do desenho :

EMBUTIDO PARA PAVIMENTO

Escalas :

1/10 para a parte em pormenor.
1/40 para o conjunto.

Acabamento :

Pormenor coberto a tinta da China. Conjunto só a lápis.

Largura dos traços a tinta da China :

1mm, em geral, para o desenho em pormenor.
0mm,2 para a esquadria, para a legenda e para os traços mais finos do desenho.

Traços a lápis :

Finos, bem visíveis e de intensidade uniforme.

Letras, algarismos e setas :

A tinta da China e dos tipos indicados nos modelos de desenho e da legenda.

Linhas de chamada :

Finas, a tinta carmim.

Linhas de cotas :

Finas, a tinta azul da Prússia.

Eixos :

A traço fino e ponto, a tinta carmim.

Linha de corte :

A traço fino e dois pontos, a tinta da China.

XXII — Como se distingue a cal em pó do gêsso?

XXIII — Que vantagens pode ter um manómetro de água sôbre um manómetro de mercúrio?

XXIV — Princípio de Arquimedes; equilíbrio dos corpos imersos e emersos; aplicações.

XXV — Uma queda de água que alimenta uma turbina e põe em movimento um dínamo debita 500 litros por segundo e tem uma altura 50 metros. O dínamo recebe 80 % da potência produzida pela queda de água e tem um rendimento de 90 %.
Achar em quilowatts a potência fornecida pelo dinamo e indicar as séries de transformações energéticas que se verificam na instalação descrita.

XXVI — Porque será preferível dizer-se escala (termométrica) centesimal, a escala centígrada?

XXVII — Porque razão utilizam espelhos parabólicos os reflectores dos faróis e os projectores de grande potência?

XXVIII — Estudo das reacções dos ácidos sulfúrico e azótico diluidos e concentrados sôbre o ferro. Aplicações dessas reacções (maneira de transportar estes ácidos, preparação química de certos compostos).

XXIX — Um gás de iluminação (ou gás da hulha) tem a seguinte composição química: hidrogénio 50, metano 30, óxido carbono 10, anidrido carbónico 5, etileno 3, acetileno 2. Procurar aproximadamente o pêso dum litro dêste gás e deduzir algumas outras propriedades interessantes dêste gás. C = 12 H = 1 O = 16.

XXX — Porque razão uma cal já antiga quando misturada com água desenvolve menos calor do que uma cal recentemente preparada?

XXXI — Como se distingue um sulfato dum sulfito e de um sulfureto?

XXXII — Em que condições deve transportar-se a a energia eléctrica para ser económico o seu transporte?

XXXIII — Electrólise; leis de Faraday; aplicações correspondentes.

XXXIV — Um motor eléctrico põe em movimento um guindaste que consegue levantar 54 toneladas à altura de 10 metros em cada minuto. Achar em Kilowatts (KW) e em cavalos (CV) a potência mínima do motor. Sabe se o rendimento dos motores eléctricos é elevado?

XXXV — Parece-lhe correcto o enunciado do seguinte problema:
Achar o pêso da terra?

XXXIV — Qual é a utilidade dos diafragmas nos aparelhos de óptica?

PUBLICAÇÕES RECEBIDAS

Publicações não periódicas

Teoria da Electricidade, pelo Prof. António da Silveira.

O Estado Novo — Edição do S. P. N.

Águas de Lisboa — Álbum da C. de A. de Águas à Cidade de Lisboa.

Publicações periódicas

PORTUGAL

A ARQUITECTURA PORTUGUESA E CERÂMICA E EDIFICAÇÃO — Março e Abril de 1941.
A GRANJA — N.º 8 — 1941.
A INDÚSTRIA DO NORTE — Janeiro a Março de 1941.
BOLETIM DA ORDEM DOS ENGENHEIROS — N.º 40 — Abril de 1941.
BOLETIM DA JUNTA NACIONAL DE CORTIÇA — N.º 17, Abril de 1941.
BROTÉRIA — Maio-1941.
GAZETA DOS CAMINHOS DE FERRO — N.ºs 1279 a 1282.
MEDICINA — N.º 42, 1941
OCIDENTE — Abril e Maio de 1941.
INDÚSTRIA PORTUGUESA — Abril de 4941.
RÁDIO-MOÇAMBIQUE — Janeiro-Fevereiro, 1941.
REVISTA DE ARTILHARIA — Março de 1941.
REVISTA DA FACULDADE DE ENGENHARIA — Março 1941.
SEARA NOVA — N.ºs 715-719.
SCIENTIA — Janeiro — Março de 1941.

ALEMANHA

REVISTA SIEMENS — N.º 1, 1941.
EL PROGRESO DE LA INGENIERIA — Março-1941.

ARGENTINA

LA INGENIERIA — Janeiro e Fevereiro de 1941.
CIENCIA Y TECNICA - REVISTA DEL CENTRO DE ESTUDIANTES DE INGENIERIA — Fevereiro e Março de 1941.
INSTITUTO ARGENTINO DE RACIONALIZACION DE MATERIALES — Fevereiro de 1941.

BÉLGICA

ARCOS — Março 1941.

BRASIL

REVISTA POLITÉCNICA — Julho-Setembro, 1941.

ESPANHA

REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS — Maio de 1941.
DINA — REVISTA DA ASSOC. NACIONAL DE ENGENHARIA INDUSTRIAL — Maio de 1941.

HUNGRIA

TECHNIKA — N.º 4 de 1941.

ITÁLIA

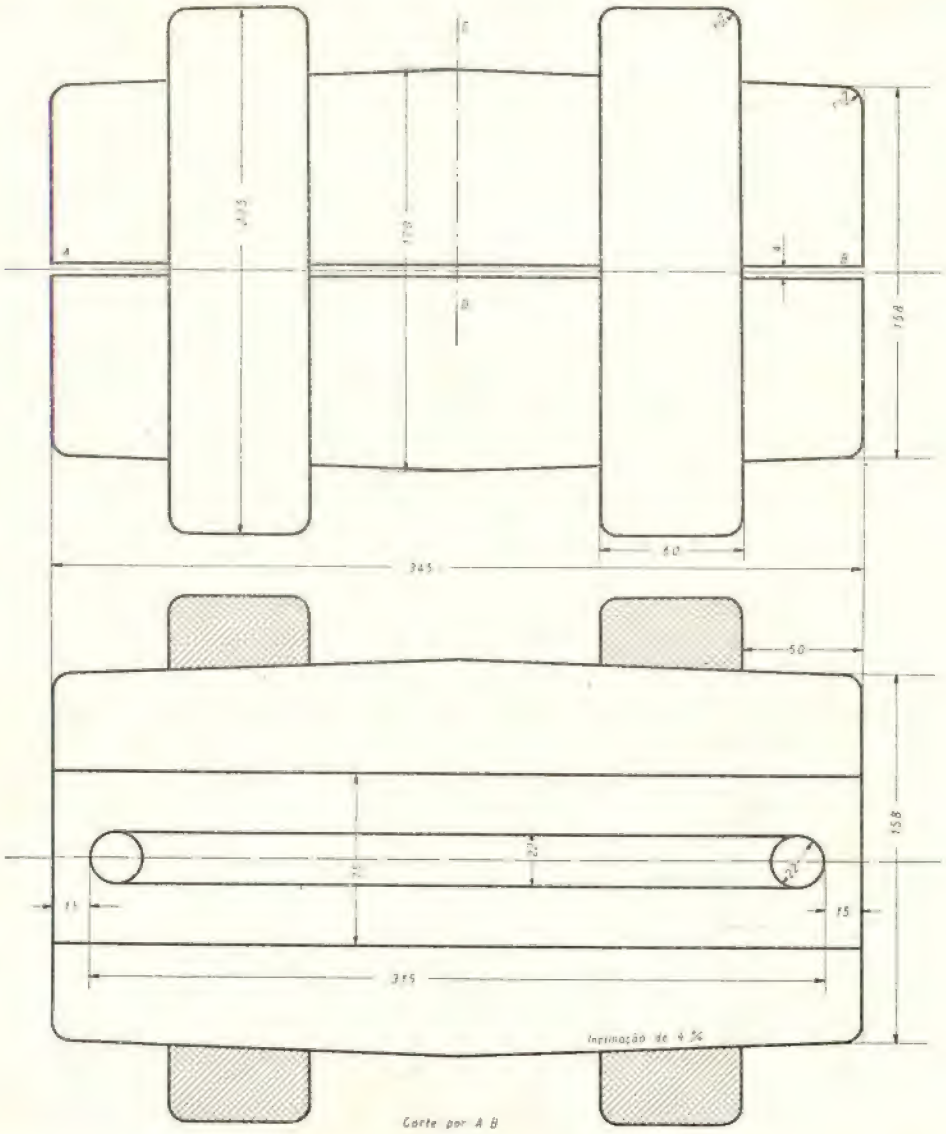
L'ORGANYZIONE SCIENTIFICA DEL LAVORO — Abril 1941.
ANNALI DEI LAVORI PUBLICI — Janeiro de 1941.
L'INGEGNERE — N.ºs 3 e 4 de 1941.
L'ELECTROTECNICA — Dez. de 1940 e Jan. e Fev de 1941.

SUÉCIA

ASEA-REVUE — Julho-Novembro de 1940.

SUÍÇA

REVUE BROWN BOVERI — Maio de 1941.

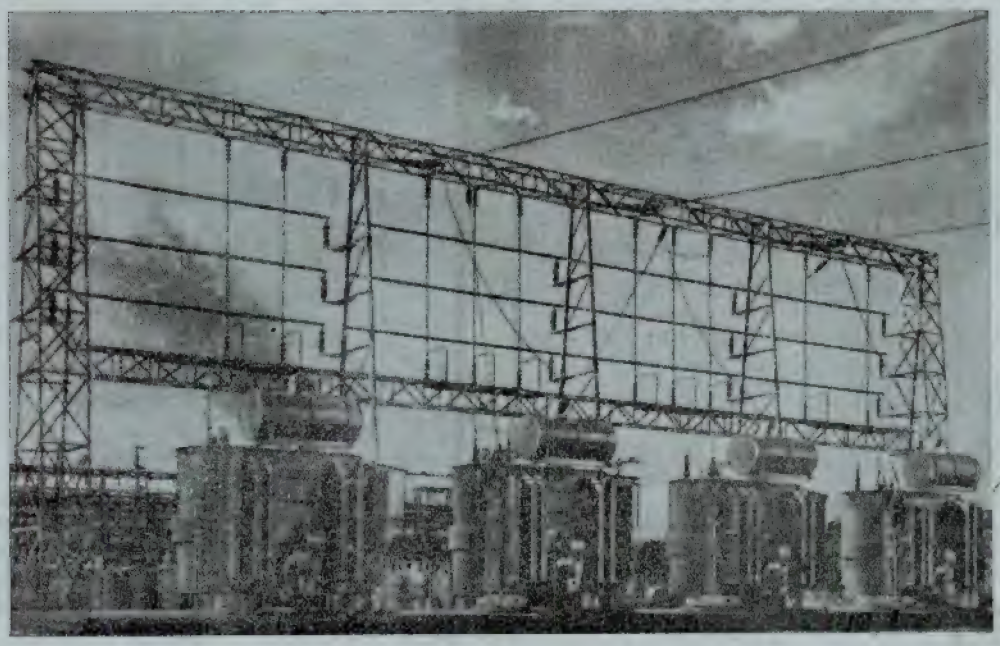


(Espaço destinado ao desenho à vista)

	Datas	I.S.T.	Candidato nº ____
Começado a lápis	/ /	Prova de Desenho	Nome ____
Desenhado a lápis	/ /		Bilhete de identidade nº ____
Passado a tinta	/ /		
Escala 9/10	UNIÃO DE VEIOS		Exame de aptidão

GENERAL ELECTRIC

Schenectady, N. Y.



Sub-estação ao ar livre de 25 000 kVA, 220.000 volts

Motores e dínamos. Alternadores. Transformadores. Aparelhos para alta e baixa tensão. Centrais termo e hidroeléctricas. Instalações para melhorar o factor de potência. Tracção eléctrica. Máquinas, Transformadores e Electrodos para soldadura eléctrica. Fornos eléctricos. Automotoras eléctricas e Diesel-Eléctricas. Turbinas de vapor. Aparelhos de iluminação. Instrumentos de medida. Cabos e fios. Electrificação de fábricas. Comandos eléctricos especiais para fábricas téxteis, fábricas de papel, etc. Máquinas frigoríficas.

THOMSON
GENERAL ELECTRIC

Portuguesa, L.da

LISBOA
Rua do Norte, 5

Telef. 28135-28136

Granulados de mármores

para exportação e para o país

Mosaicos de granulados de mármore

OS MAIS BONITOS
OS MAIS RESISTENTES
OS MAIS VANTAJOSOS

Soc. Portuguesa CAVAN

Rua D. Estefania, 42

Telefone 47812 — Lisboa

FILIAL NO PÔRTO:

PRAÇA DA BATALHA, 90, 2.º

SOCIEDADE INDUSTRIAL METALURGICA

Responsabilidade Limitada

(REGISTADO)

SERRALHARIAS,
CALDEIRARIA,
FERRARIA,
FUNDIÇÕES

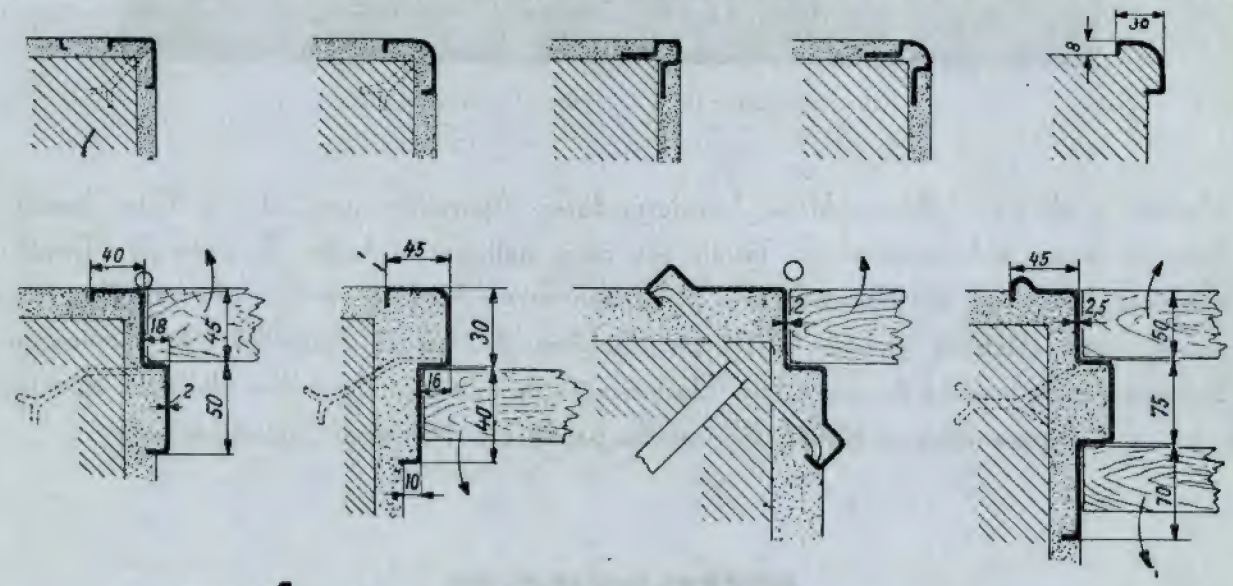
ESCRITÓRIO

Rua de S. Tiago, 13

LISBOA

Telefone 26572

ALGUNS EXEMPLOS DOS PERFIS QUE SE PODEM REALIZAR



LISBOA **FÁBRICA PORTUGAL**

FABRICAÇÃO DE PERFIS DE CHAPA PARA TODOS OS GENEROS DE TRABALHOS DE CONSTRUÇÃO CIVIL

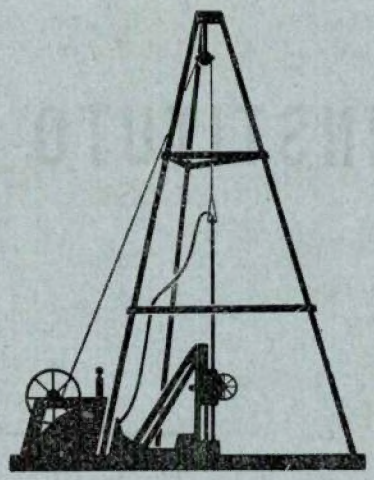
UMA REVOLUÇÃO NA CONSTRUÇÃO CIVIL

Sondages. Etanchements. Consolidations "Procédés Ródio"

Sondagens geológicas
Estudo da resistência e permeabilidade de terrenos; laboratório geofísico
Consolidação e impermeabilização de terrenos e alvenarias por meio de injecções de cimento, produtos químicos, emulsão betuminosa Shellperm, etc.
Estacas de beton armado, sistema **Ródio** sem fazer trepidar o solo
Rebocos comprimidos por «**cement gun**»
Fundações em terrenos difíceis por congelação artificial, ou baixando o nível da água friática.

Sociedade Anónima com séde em PARIS

As melhores referências no paiz e no estrangeiro



Engenheiro delegado para Portugal

Walter Weyermann

P. do Município, 32-2.º--LISBOA Tel. 2 8685

Tabelas para o Cálculo do Betão Armado

Elaboradas em completo acôrdo com o Regulamento Português do Betão Armado

PELO ENGENHEIRO FERNANDO VASCO COSTA

A' venda na Redacção da "Técnica"

OFICINAS E LABORATÓRIOS

DO

INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

As oficinas pedagógicas do Instituto Superior Técnico, de CARPINTARIA DE MOLDE, de INSTRUMENTOS DE PRECISÃO e de ELECTROTÉCNICA, fornecem todo o género de material escolar e de demonstração para o ensino técnico. Nos laboratórios de QUÍMICA ANALÍTICA, FÍSICA INDUSTRIAL E DE MINERALOGIA executam-se análises para o público

Para quaisquer informações, dirigir-se ao secretário da comissão executiva

EMPRÊSA DE SONDAGENS E FUNDAÇÕES, L.DA

COM

Eng. Ricardo E. Teixeira Duarte

(um quarto de século de especialização técnica)

Sondagens geológicas

—

Poços artezianos

—

Rebaixamentos do nível freático

—

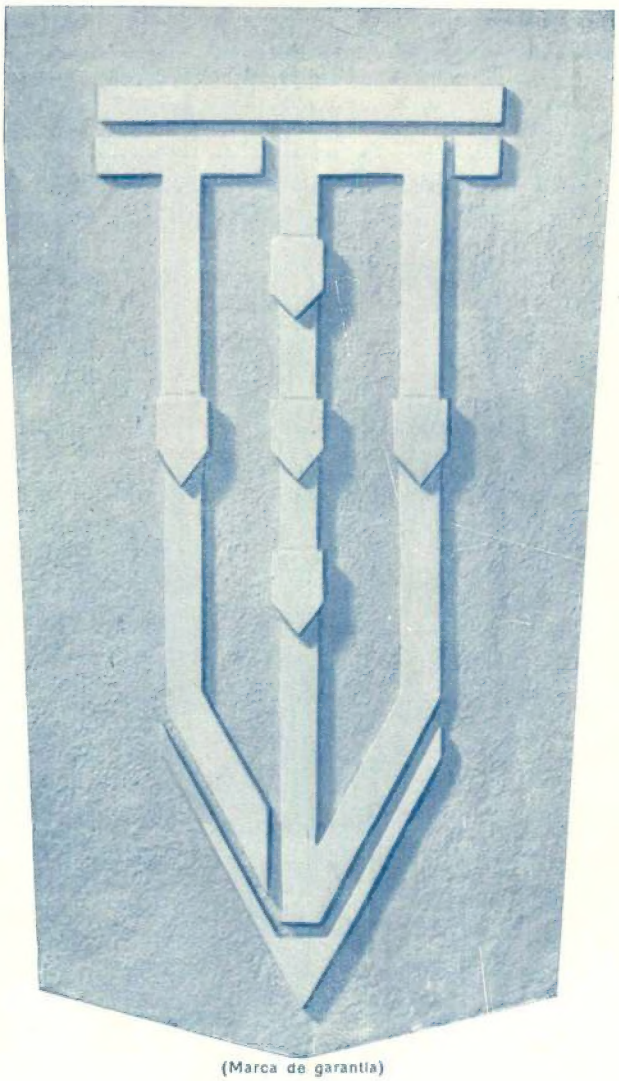
Consolidações do solo

—

Impermeabilização de rochas

—

Captações de água subterrânea



(Marca de garantia)

Fundações de todos os géneros

—

Alicerces económicos

—

Estacas de todos os tipos

—

Consolidação de más fundações

—

Obras hidráulicas

—

Obras subterrâneas

LISBOA — RUA AUGUSTA, 280, 3.º E 4.º

TELEFONE 2 3962

SOCIEDADE ANÓNIMA

BROWN, BOVERI & CIE.

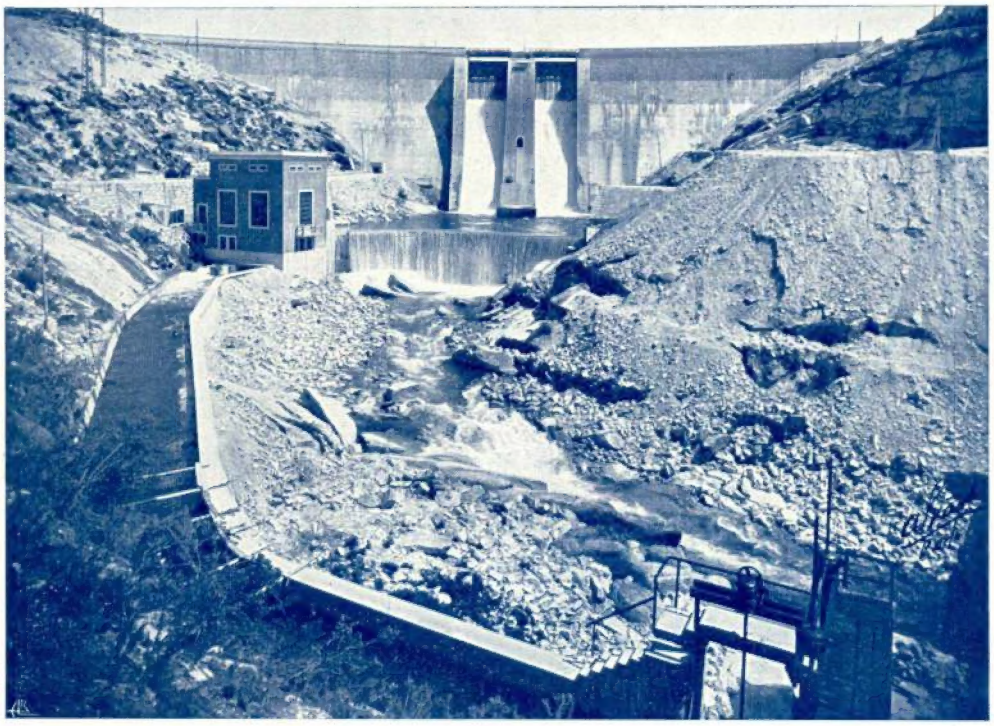
BADEN (SUISSA)

Representante geral para Portugal e Colónias:

EDOUARD DALPHIN

Escritório Técnico: Rua de Passos Manuel, 191, 2.º // PORTO // Tel. 2411

Máquinas eléctricas, transformadores, mutadores, aparelhos para alta e baixa tensão. Montagem completa de centrais termo e hidro-eléctricas. Electrificação de fábricas e de caminho de ferro. Locomotivas, e auto-motoras eléctricas e Diessel-eléctricas. Máquinas de extracção. Turbinas a vapor. Geradores de vapor Velox. Máquinas frigoríficas. Grupos e transformadores para a soldadura pelo arco. Fornos eléctricos. Comandos eléctricos especiais para tôdas as máquinas utilizadas nas Fábricas de Fiação, Tecelagem, Acabamentos, Estamparia, Cimento, Moagem, etc.



Barragem do Ermal, da Companhia Electro-Hidráulica de Portugal, com 20 milhões de metros cúbicos de capacidade da albufeira. Na parte central, duas comportas automáticas, da casa construtora «Ateliers des Charmilles», de 9 × 5 metros, para a evacuação das cheias. Em baixo, a central automática de Guilhofrei (I) com uma turbina vertical tipo Kaplan (Ateliers des Charmilles) de 2750 cavalos e o canal de condução da água à central do Ermal (central II) com uma turbina vertical tipo Francis de 6250 cavalos (Ateliers des Charmilles) e duas horizontais (Escher-Wyss) de 500 e 1500 cavalos. Tôda a parte eléctrica (alternadores, transformadores, aparelhos de 2000 e 30000 Volts) da casa BROWN, BOVERI & Cie.